# Université Paris-Saclay – Master 2 AMS – 2020-2021

## Analyse semiclassique

(Stéphane Nonnenmacher)

## Feuille de TD: Dynamique hamiltonienne

### 1. Complétude du flot hamitonien

Soit $H \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ la fonction de Hamilton (le hamiltonien), qui repésente l'énergie totale d'un système conservatif. La dynamique de ce système est alors fournie par les équations de Hamilton. Partant d'un point $\rho_0 = (x_0, \xi_0)$ de l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$, ce point va suivre une trajectoire $\rho(t) = (x(t), \xi(t))$, solution de l'EDO:

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \xi}.$$

De façon équivalente, le *champ de vecteurs hamiltonien* induit par $H$, noté $X_H := (\frac{\partial H}{\partial \xi}, -\frac{\partial H}{\partial x}) \in T\mathbb{R}^{2d}$, engendre le *flot hamiltonien* $\phi_H^t : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$, qui envoie le point $\rho_0 = (x_0, \xi_0)$ vers $\rho(t) = \phi_H^t(\rho_0)$ . Pour un hamiltonien général, la solution $\phi_H^t(x_0, \xi_0)$ n'existe a priori que sur un intervalle de temps fini, qui dépend du point initial $\rho_0$. On dit que le flot est *complet* si $\phi_H^t(x_0, \xi_0)$ est bien défini pour tout point $\rho_0$ et tout temps $t \in \mathbb{R}$. On va chercher des conditions suffisantes sur $H$ assurant que $\phi_H^t$ soit complet.

A) Montrer que $X_H$ préserve chaque couche d'énergie $\Sigma_E := \{\rho \in \mathbb{R}^{2d} : H(\rho) = E\}$. En déduire que $\phi_H^t$ préserve également $\Sigma_E$. On peut donc restreindre l'étude de $\phi_H^t$ aux couches d'énergie individuelles.

B) On considère le cas, important physiquement, du hamiltonien de la forme:

$$H(x, \xi) = |\xi|^2/2 + V(x) \quad \text{(énergies cinétique + potentielle)},$$

avec une énergie potentielle $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Montrer que ce hamiltonien conduit aux équations de Newton pour une particule dans un potentiel, sans frottement.
Montrer que si une des hypothèses suivantes est satisfaite, alors $\phi_H^t$ est automatiquement complet :

(1) $V(x)$ est *confinant*, c'est-à- dire $V(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$.
(2) $\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}} \|\partial^2 H(x, \xi)\| < \infty$ (toutes les dérivées secondes de $H$ sont uniformément bornées).
(3) $V(x)$ est borné inférieurement: $V(x) \geq V_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

C) Pour chacun des trois examples suivants, en dimension $d = 1$, on cherchera à tracer le *portrait de phase* du flot dans $\mathbb{R}^2$, en représentant quelques trajectoires

significatives, et en indiquant le sens du champ de vecteur.
*Astuce:* penser à utiliser la conservation de l'énergie

(1) potentiel confinant quadratique : $H(x,\xi) = |\xi|^2/2 + \alpha x^2/2$, avec $\alpha > 0$ (oscillateur harmonique).
(2) $H(x,\xi) = |\xi|^2/2 - \alpha x^2/2$ sur $\mathbb{R}^2$ (on expliquera l'appellation de "barrière de potentiel quadratique"). Par un calcul explicite, montrer que $\phi_H^t$ est complet. On identifiera le point fixe ($\rho(t) = \rho_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$), ainsi que les points piégés dans le futur, respectivement le passé: (les points $\rho_0 \in \mathbb{R}^2$ tels que $\phi_H^t(\rho_0)$ reste borné lorsque $t \to +\infty$, respectivement $t \to -\infty$).
(3) $H(x,\xi) = |\xi|^2/2 - \alpha x^4/4$ (barrière de potentiel quartique). Montrer que ce flot hamiltonien n'est *pas* complet, en exhibant une trajectoire qui part à l'infini en un temps fini.

## 2. Sous-espaces lagrangiens

Sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ soit $\omega = \sum_{j=1}^d d\xi_j \wedge dx_j$ la $2-$forme de Liouville (la forme symplectique canonique).

A) Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2d}$. On appelle $V$ *un espace lagrangien* si $V$ est de dimension $d = 1$, et $\omega_{\restriction V} = 0$, c-a-d $\omega(v_1, v_2) = 0$ pour tous $v_1, v_2 \in V$.

(1) En dimension $d = 2$, montrer que les sous-espaces suivants sont lagrangiens: $\mathrm{Vect}(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, $\mathrm{Vect}(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2})$, $\mathrm{Vect}(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2})$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_1})$ n'est pas lagrangien, mais est un symplectique ($\omega_{\restriction V}$ est non-dégénérée).
(2) Soit $A$ une matrice $d \times d$ réelle. Montrer que l'espace vectoriel
$$\Lambda_A := \{(x, \xi = Ax) \ : \ x \in \mathbb{R}^d\}$$
est lagrangien dans $\mathbb{R}^{2d}$ ssi $A$ est symétrique. De même, pour $B$ une matrice $d \times d$, montrer que $\tilde{\Lambda}_B = \{(x = B\xi, \xi) \ : \ \xi \in \mathbb{R}^d\}$ est lagrangien ssi $B$ est symétrique.
Déterminer la condition pour qu'un même espace lagrangien puisse s'écrire sous la forme $\Lambda_A$ ou $\tilde{\Lambda}_B$.

(3) Déterminer les fonctions $S_A(x)$ telles que $\Lambda_A = \{(x, \nabla S_A(x)),\ x \in \mathbb{R}^d\}$. Une telle fonction $S_A(x)$ s'appelle une fonction génératrice de $\Lambda_A$. Obtenir de même les fonctions génératrices $W_B(\xi)$ de $\tilde{\Lambda}_B$, telle que $B\xi = -\nabla W_B(\xi)$.

B) Dans le cas où $\Lambda_A = \tilde{\Lambda}_B$, on se propose de retrouver $W_B(x)$ à partir de $S_A(x)$, par une *transformée de Legendre*. Pour $\xi$ fixé, on considère la fonction
$$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) := S_A(x) - \langle x, \xi \rangle.$$
Montrer que cette fonction possède un unique point critique $x_\xi$; on note alors $W(\xi)$ la valeur critique $F_\xi(x_\xi)$. Montrer que $W(\xi)$ définit une fonction génératrice pour $\Lambda_B$.

C) Soit $\Lambda$ une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d}$ de dimension $d$. On appelle $\Lambda$ une *sous-variété* *lagrangienne* si $\omega|_\Lambda = 0$, c-a-d pour tout $\rho \in \Lambda$, l'espace tangent $T_\rho\Lambda$ est lagrangien.

(1) Décrire les sous-variétés lagrangiennes en dimension $d = 1$.

(2) En dimension $d \geq 1$, on suppose qu'une sous-variété $\Lambda$ se *projette bien sur les coordonnées* $x$: $\Lambda = \{(x, G(x)),\ x \in \mathbb{R}^d\}$, avec $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application lisse. Montrer alors que $\Lambda$ est lagrangienne si et seulement si $G(x)$ est un gradient, autrement dit il existe une fonction lisse $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $G(x) = \nabla S(x)$. On appelle $S(x)$ une fonction génératrice de $\Lambda$. *Astuce:* utiliser la 1-forme de Liouville $\alpha = \sum_j \xi_j\, dx_j$, restreinte à $\Lambda$, et invoquer le Lemme de Poincaré (une 1-forme fermée sur $\mathbb{R}^d$ est exacte).

D) Soit $\kappa : U \subset \mathbb{R}^{2d} \to W \subset \mathbb{R}^{2d}$ un difféomorphisme lisse. On appelle $\kappa$ une transformation symplectique si $\kappa$ préserve $\omega$ : $\kappa^*\omega = \omega$.

(1) Montrer que la composition des deux transformations symplectique est encore symplectique. Montrer qu'une transformation symplectique préserve le volume dans l'espace des phases. Montrer que pour tout Hamiltonien $H$, le flot hamiltonien $\phi_H^t$ est symplectique pour tout $t$.
(2) On se restreint au cas où $\kappa$ est une bijection linéaire sur $\mathbb{R}^{2d}$, autrement dit $\kappa$ est représenté par une matrice inversible $M = M_\kappa$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2d}$. Montrer que $\kappa$ est symplectique ssi
$$M^T J M = J, \qquad \text{où on a pris} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$
(3) On identifie canoniquement les espaces symplectiques $T\mathbb{R}^d \times T\mathbb{R}^d \equiv T\mathbb{R}^{2d}$ par $\big((x;\xi),(y;\eta)\big) \leftrightarrow (x,y;\xi,\eta)$. Le graphe $\Gamma_\kappa$ de $\kappa$ est donc donné par
$$\Gamma_\kappa = \Big\{(x,y,\xi,\eta) : \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix},\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}\Big\}.$$
On note $\Gamma'_\kappa = \{(x,y,\xi,\eta) : (x,y,\xi,-\eta) \in \Gamma_\kappa\}$ le *graphe tordu* de $\kappa$. Montrer que le difféomorphisme $\kappa$ est symplectique ssi $\Gamma'_S$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{4d}$. Dans ce cas, en supposant que $\Gamma_\kappa$ se projette bien sur les coordonées $(x,y)$, montrer que la transformation $\kappa$ peut être décrite en terme d'une fonction génératrice $S_\kappa : \mathbb{R}^{2d}_{x,y} \to \mathbb{R}$.
Même question en supposant que $\Gamma_\kappa$ se projette bien sur les coordonnées $(x,\eta)$.