Intégration et Probabilités

Cours n° 2

29 février 2024

USTC

Chapitre 2 : Mesures (positives), fonctions mesurables

Axiomes de la théorie de la mesure

Ensemble E ⇝ tribu (= σ-algèbre) ⇝ mesure sur cette tribu.

partie de E = sous-ensemble de E

fonction : $E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable par rapport à la tribu.

Cas particuliers (les + intéressants) : $E = \mathbb{R}^d$

tribu = tribu de Borel sur $\mathbb{R}^d$

mesure = mesure de Lebesgue (= volume sur $\mathbb{R}^d$)

construction rigoureuse dans un autre chapitre.

Chap. 3 : définir l'intégrale (sur E, par rapport à une mesure μ, des fonctions intégrables).

Sous-Ensembles mesurables, tribus

E ensemble (non vide) quelconque.

Ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Déf: Une tribu (ou σ-algèbre) de E est une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ ($\mathcal{A}$ est un ensemble de sous-ensembles de E) ayant les propriétés suivantes:

i) $E \in \mathcal{A}$

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, alors son complémentaire $\complement A = A^c = E \setminus A$ est aussi dans la tribu.

iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ est aussi dans $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Une fois une tribu $\mathcal{T}$ choisie sur E, on appelle tout élément de $\mathcal{T}$ un <u>ensemble $\mathcal{T}$-mesurable</u>, ou un <u>ensemble mesurable</u> s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la tribu.

. La paire $(E, \mathcal{T})$ est appelé un <u>espace mesurable</u>.

<u>Propriétés d'une tribu</u>:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ $\qquad \emptyset = E \setminus E = \complement E$.
2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c$ est aussi dans $\mathcal{T}$.
3. Si $A_n = \emptyset$ pour $n > N \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$

   Si $A_n = A_N$ pour $n \geq N \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. $\rightarrow$ stabilité de $\mathcal{T}$ par union (et par intersection) finies.

<u>Rem</u>: Si on avait affaibli l'axiome iii) par " stabilité par unions finies", on obtiendrait les propriétés d'une <u>algèbre</u>

(au sens de la théorie des ensembles).

Ici, on a une notion plus riche de $\underline{\underline{\sigma}}$- algèbre.

↳ "infini dénombrable"

Exemples de tribus sur E

1. tribu complète $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$.
2. tribu minimale $\mathcal{A} = \{E, \emptyset\}$

Pour des ensembles "riches" comme $\mathbb{R}$, ces 2 tribus ne seront pas très intéressantes.

<u>Proposition</u>. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont 2 tribus sur E, alors

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A}$ et $A \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{P}(E)$ est également une tribu.

Preuve : facile à partir des axiomes d'une tribu.

Définition Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. Il existe alors une plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{C}$. Cette tribu est unique, définie par :

$$\underbrace{\sigma(\mathcal{C})}_{\text{la tribu}} := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ tribu de } E \\ \text{et } \mathcal{A} \supset \mathcal{C}}} \mathcal{A}$$

$\sigma(\mathcal{C})$ est appelée la tribu engendrée par la famille $\mathcal{C}$.

- Si on a 2 famille $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(E)$, alors

$$\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$$

- <u>Tribu des borélien, ou tribu de Borel.</u>

On va considérer des ensembles E ayant des structures supplémentaires :

1. E espace topologique : on a défini une topologie sur E,

c'est-à-dire une famille d'ouverts $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$.

Rappel sur axiomes d'une topologie :

- $E \in \mathcal{O}$; $\emptyset \in \mathcal{O}$; $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$, avec $U_\alpha \in \mathcal{O}$,

  alors $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{O}$.

  ($\mathcal{O}$ stable par intersections finies / par union quelconque)

Alors la tribu $\underline{\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(E)}$ (tribu engendrée par l'ensemble des ouverts) est appelée la <u>tribu de Borel</u> sur l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$.

$\sigma(\mathcal{O})$ = la plus petite tribu qui contient tous les ouverts de E.

Les éléments de cette tribu sont appelés les sous-ensembles boréliens de E, ou les boréliens de E.

2. Cas particulier : E espace métrique, muni d'une <u>distance</u>

$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \text{ ssi } x = y \\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{cases}$$

$r \geq 0$ $\quad B(x,r) = \{ y \in E ; \ d(x,y) < r \}$ boule ouverte, engendrent une topologie sur E.

3. $E = \mathbb{R}^d$, muni de la distance euclienne

$d(x,y) = \| x - y \|$.

- Remarquer les différences entre les axiomes d'une topologie, et les axiomes d'une tribu.

Remarque : lorsque E = espace topologique, la tribu par défaut sera la tribu de Borel.

<u>Ex :</u> Montrer que pour $E = \mathbb{R}$, la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu engendrée par la famille des intervalles $\{]-\infty, a[\ ; \ a \in \mathbb{Q} \} = \mathcal{C}$

$\sigma(\mathcal{C}) \overset{?}{=} \sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

indications : . $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$

. tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints

. Sur la complexité de la tribu de Borel.

$E = \mathbb{R}$. Ouverts $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Fermés $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$(U_n)_{n \geq 0}$ ouverts $\longrightarrow \underbrace{\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n}_{\leadsto G_\delta} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, en général c'est 1 nouvel ensemble.

$(F_n)_{n \geq 0}$ fermés $\underbrace{\bigcup_{n \geq 0} F_n}_{\text{ensemble } F_\sigma} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en général, pas un fermé

$(K_n)_{n \geq 0}$ compacts $\left(\bigcup_{n \geq 0} K_n\right)$ ensembles K_σ.

$G \leadsto G_\delta$ " $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_\delta$ " $= G_{\delta\sigma}$

- E_1, E_2 2 ensembles quelconques.

  tribu $\mathcal{A}_1$ tribu $\mathcal{A}_2$.

Produit cartésien $E_1 \times E_2 \{ (x_1, x_2) ; x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \}$.

Tribu naturelle sur $E_1 \times E_2$?

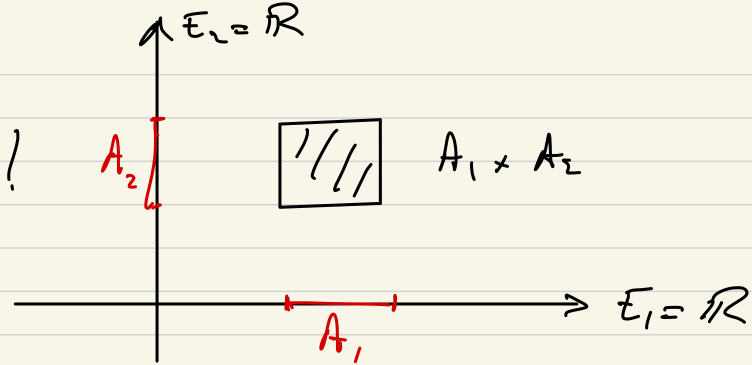
<u>Définition</u> $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ 2 espaces mesurables. La tribu-produit sur $E_1 \times E_2$ est définie par :

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \sigma\left(\left\{ A_1 \times A_2 \,;\, \begin{array}{l} A_1 \in \mathcal{A}_1, \\ A_2 \in \mathcal{A}_2 \end{array} \right\}\right)$$

notation "produit tensoriel"

La tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ne contient pas seulement des éléments de la forme $A_1 \times A_2$.

$\sigma(A_1 \times A_2)$ n'est pas un produit cartésien !



- E_1, E_2 espaces topologiques $\rightsquigarrow \mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2)$.

  $E_1 \times E_2 \longrightarrow$ topologie produit, engendrée par les produits $O_1 \times O_2 \longrightarrow$ topologie naturelle sur $E_1 \times E_2$

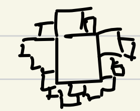
  $\rightsquigarrow$ tribu de Borel sur $E_1 \times E_2$. $\mathcal{B}(E_1 \times E_2)$.

$\mathcal{B}(E_1)$ et $\mathcal{B}(E_2) \rightsquigarrow \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$ tribu produit.

Facile à montrer : $\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_1) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$

En général, l'inclusion inverse est fausse.

- Cas particulier : $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a l'inclusion inverse : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.



Contre-exemple ?

- <u>Mesure (positive) sur une tribu</u>

Espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. "mesurer" un ensemble $A \in \mathcal{A}$, c'est lui donner un "poids".

$$A \longmapsto \mu(A) \geq 0 \quad \text{le poids de } A.$$

μ doit satisfaire des propriétés d'additivité.

Définition [Mesure]

$(E, \mathcal{A})$ espace mesurable. Une mesure positive est une application

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty], \quad \text{vérifiant}$$
$$A \longmapsto \mu(A)$$

les propriétés suivantes :

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ de parties $\mathcal{A}$-mesurables disjointes deux à deux $(A_n \cap A_m = \emptyset, \ \forall n \neq m)$,

$$\mu\Big(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n \geq 0} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) \quad \sigma\text{-additivité}$$

↑ union disjointe

L'espace $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé un espace <u>mesuré</u>.

Propriétés :

0. On peut avoir des parties mesurables A t.q. $\mu(A) = +\infty$.

(alors la mesure μ est dite "infinie").

On a alors $\mu(E) = +\infty$.

1. Si on prend $A_n = \emptyset$ pour $n > N \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$

$A_1, \dots, A_N$ disjoints 2 à 2

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{N} \mu(A_n).$$

$\Rightarrow \mu$ est additive (p/r à une union disjointe finie).

2. L'additivité ne s'étend pas en général aux unions indénombrables.

$(A_\alpha)_{\alpha \in I} \rightsquigarrow$ indénombrable $\quad \sum_{\alpha \in I} \mu(A_\alpha)$?

Ex : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: $]a,b[= \bigcup_{x \in]a,b[} \{x\}$

mesure de Lebesgue $\rightarrow \lambda(\{x\}) = 0$ mais $\lambda(]a,b[) = b-a$.

$$\cancel{b-a = \sum_{x\in]a,b[} 0}$$

3. La mesure n'est pas définie sur tous les sous-ensemble de E, seulement sur les éléments de la tribu $\mathcal{A}$.

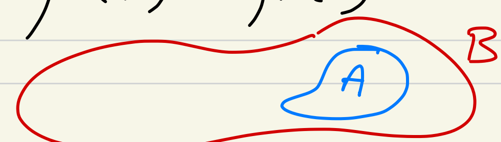
ex: la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ n'est pas définie sur tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

p/r = par rapport

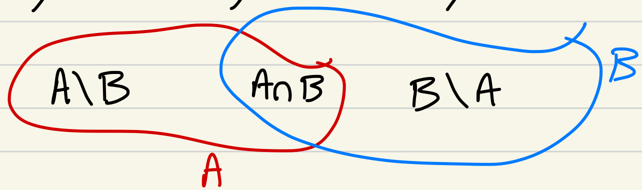
Propriétés de la mesure μ p/r aux manipulations d'ensembles

1. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Si $\mu(A) \underbrace{< \infty}_{\text{est fini}}$, alors $\mu(\underbrace{B \setminus A}_{B \cap A^c}) = \mu(B) - \mu(A)$.

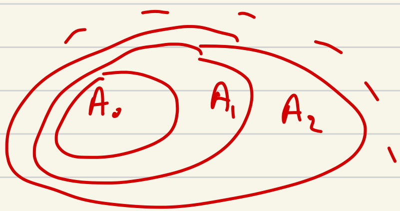


2. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$



$B \setminus A = \{ x \in B ; x \in A^c \}$
$= B \cap A^c$

3. $(A_n)_{n \geq 0}$ famille <u>croissante</u> de mesurables $(A_n \subset A_{n+1}, \forall n)$



$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mu(A_n)$$

↑ limite croissante

4. $(B_n)_{n \geq 0}$ suite décroissante $(B_n \supset B_{n+1}, \forall n)$

et si $\mu(B_0) < \infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \right) = \lim_{n \to \infty} \downarrow \mu(B_n)$$

(on peut supposer que $\mu(B_N) < \infty$ pour un certain N)

<u>Contre-ex</u> : sur $\mathbb{R}$, $B_n = [n, +\infty[$ suite $\downarrow$.

$\lambda(B_n) = \infty$, $\forall n$.

$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \emptyset \Rightarrow \lambda\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = 0$.

5. $(A_n)_{n\geq 0}$ famille quelconque $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$.

<u>Preuves</u> :

1. $A \subset B \Rightarrow B = A \sqcup (B \setminus A)$

union disjointe

additivité de $\mu \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$.

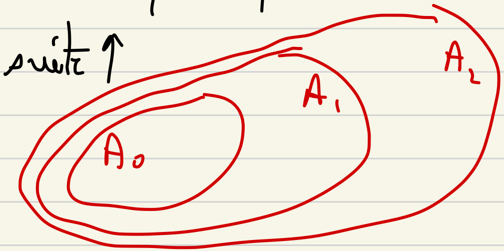
2. $\mu(B) = \mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A)$

$\mu(A) = \mu(A\cap B) + \mu(A\setminus B)$

$\rightarrow \mu(A) + \mu(B) = 2\mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A) + \mu(A\setminus B) = \mu(A\cap B) + \mu(A\cup B)$

3. On veut fabriquer des ensembles disjoints

(A_n) suite $\uparrow$



$$C_0 = A_0$$

$$C_1 = A_1 \setminus A_0$$

$$\vdots$$

$$C_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

$$A_1 = A_0 \cup A_1 = C_0 \sqcup C_1$$

$$\rightarrow A_n = \bigsqcup_{j=0}^{n} C_j$$

$$\mu(A_n) = \sum_{j=0}^{n} \mu(C_j) \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{j=0}^{\infty} C_j$$

$$\mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{j=0}^{\infty} C_j\Big) \underset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \mu(C_j) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \mu(C_j)}_{\mu(A_n)}$$

4. (B_n) suite décroissante.

On considère $A_n = B_0 \setminus B_n \longrightarrow (A_n)_{n\geq 0}$ forme une suite $\uparrow$.

$\mu(B_0) < \infty$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = B_0 \setminus \left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right)$$

$$\mu(B_0) - \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right) = \mu\left(\underbrace{B_0 \setminus \left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right)}\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\mu(B_0) - \mu(B_n)\right)$$

$$\mu(B_0) - \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right) = \mu(B_0) - \lim_{n\to\infty}{\downarrow}\, \mu(B_n)$$

$$\bigcup_{n\geq 0} (B_0 \setminus B_n) = B_0 \setminus \left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right)$$

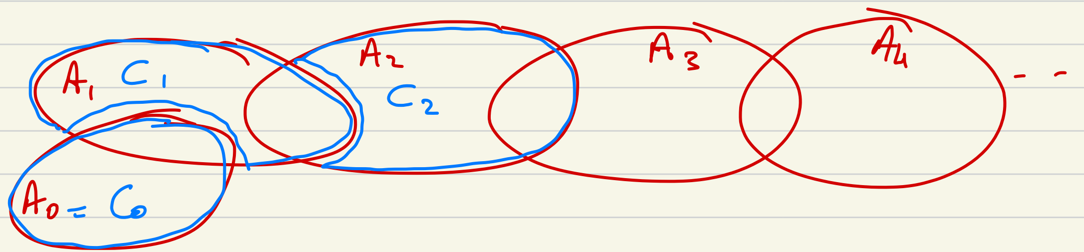
$$B_0 \setminus B_n = B_0 \cap B_n^c$$

$$\bigcup_n (B_0 \cap B_n^c) = B_0 \cap \left(\underbrace{\bigcup_n B_n^c}\right)$$

$$= B_0 \cap \left(\bigcap_n B_n\right)^c$$

$$= B_0 \setminus \left(\bigcap_n B_n\right)$$

5.



$C_0 = A_0$, $\quad C_1 = A_1 \setminus A_0$, $\quad C_2 = A_2 \setminus (A_0 \cup A_1) \ldots \quad C_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} A_j\right)$

$$C_0 \sqcup C_1 = A_0 \cup A_1$$

$\forall n, \quad C_0 \sqcup C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_n = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n$

$$\Rightarrow \quad \bigsqcup_{j=0}^{\infty} C_j = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

$$C_n \subset A_n \Rightarrow \mu(C_n) \leq \mu(A_n)$$