

Vibrations chaotiques et grosses balafres

Nalini Anantharaman, Stéphane Nonnenmacher¹

1. Introduction

Quel lien existe-t-il entre un tremblement de terre, un tambour, une cavité mésoscopique bidimensionnelle, un four à micro-ondes, une fibre optique? Les équations régissant la propagation des ondes (sismiques, acoustiques, électroniques, micro-ondes et optiques) sont linéaires; les solutions de ces équations peuvent donc se décomposer comme sommes de modes propres de vibration (ou modes stationnaires). Le caractère discret, ou « quantique », de cette décomposition en modes propres est dû à la géométrie compacte des cavités. Mathématiquement, celles-ci sont modélisées par des variétés riemanniennes (X, g) compactes de dimension d , avec ou sans bord. Pour simplifier, on se restreindra à des ondes scalaires, décrites par une fonction réelle $\psi(x, t)$. Les modes propres $(\psi_n(x))_{n \geq 0}$ satisfont alors à l'équation de Helmholtz

$$(1.1) \quad \Delta \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0,$$

où $\Delta : H^2 \rightarrow L^2$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X , et $k_n \geq 0$ est la fréquence de vibration du mode ψ_n . En présence d'un bord, comme pour le tambour ou les cavités électromagnétiques, un choix de conditions au bord est nécessaire : typiquement, des conditions de Dirichlet $\psi|_{\partial X} = 0$, ou de Neumann $\partial_\nu \psi|_{\partial X} = 0$, ∂_ν étant la dérivée normale au bord.

La question qui nous préoccupe est la *description* des modes propres, et en particulier les modes de haute fréquence $k_n \gg 1$. On voudrait prédire les propriétés de localisation des modes ψ_n , à partir de notre connaissance de la variété (X, g) .

Prenons le cas d'un domaine du plan euclidien, qu'on appellera un *billard*. Pour certains billards de forme très spécifique (par ex. un rectangle, un disque, une ellipse), une séparation de variables permet de ramener l'équation de Helmholtz à un problème aux valeurs propres à une dimension (problème de Sturm-Liouville). Dans la limite de haute fréquence, on sait résoudre ce dernier avec une précision arbitraire (par des méthodes WKB²), ou parfois même exactement (v. fig.1.1). On a donc une compréhension (presque) totale des modes propres. Cette séparation de variables peut s'interpréter comme une symétrie de la *dynamique classique* dans ce billard, autrement dit la dynamique d'une boule (ponctuelle) roulant sans frottement et rebondissant sur les bords. Dans le cas plus général d'une variété riemannienne, la dynamique que l'on regarde (en dehors des rebonds sur le bord) est le flot

¹ CMLS, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France; Institut de Physique Théorique, CEA/DSM/IPhT, Unité de recherche associée au CNRS, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France.

² Pour Wentzel, Kramers, Brillouin.

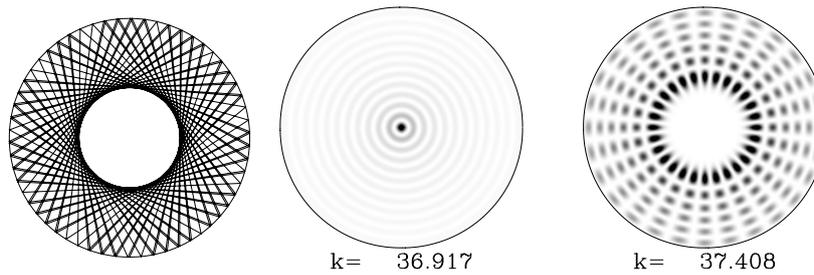


FIG. 1.1. À gauche, une orbite du billard circulaire. Au centre et à droite : deux modes propres du disque, avec leurs fréquences respectives.

hamiltonien g^t sur le fibré cotangent³ T^*X , engendré par le hamiltonien d'une particule libre

$$(1.2) \quad H(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2}, \quad (x, \xi) \in T^*X.$$

Si on se restreint à la couche d'énergie $S^*X = \{(x, \xi) : |\xi| = 1\}$, g^t est aussi le *flot géodésique*. Pour les billards rectangulaires, circulaires ou ellipsoïdaux, il existe une quantité $S(x, \xi)$ indépendante de H et constante le long des trajectoires du flot, qui rend cette dynamique *intégrable* au sens de Liouville. Par exemple, pour le disque il y a conservation du moment angulaire. Les trajectoires classiques sont alors très « régulières » (v. fig.1.1). Au niveau quantique, cette symétrie prend la forme d'un opérateur différentiel auto-adjoint $\text{Op}(S)$ qui commute avec le laplacien. La restriction de (1.1) à chaque espace propre de S fournit le problème de Sturm-Liouville mentionné plus haut.

Dès qu'on modifie un peu la forme d'un tel billard, on brise la symétrie, et il devient impossible de ramener (1.1) à un problème unidimensionnel. Le flot géodésique n'est plus intégrable, il devient chaotique dans certaines zones de l'espace des phases. On ne dispose plus de formule approchée pour décrire les modes propres ψ_n . Le cas extrême consiste en des billards *totalelement chaotiques*, comme le « stade » de Bunimovich (v. fig.1.2). Dans la suite on s'intéressera exclusivement à ces flots totalement chaotiques. Nous imposerons des conditions mathématiques suffisamment fortes pour que cette notion de « chaos » soit exploitable afin de déduire certaines propriétés des modes propres.

Signalons que les méthodes numériques les plus récentes (opérateur de bord, méthode de « scaling ») ne permettent de calculer que quelques dizaines de milliers de modes de billards bidimensionnels, au plus quelques milliers pour les billards tridimensionnels, et moins encore en cas de métrique non-euclidienne. La difficulté vient du fait que les modes de fréquence $k_n \gg 1$ oscillent (dans l'espace) sur une échelle $\sim 1/k_n$: on a donc besoin d'un maillage de plus en plus fin à mesure

³ Souvent appelé « espace des phases » en physique, il s'agit de l'ensemble des couples (x, ξ) où $x \in X$ et ξ est un (co)vecteur basé en x , représentant l'impulsion.

qu'on augmente la fréquence⁴. Heureusement, on dispose d'outils analytiques pour étudier les modes très élevés.

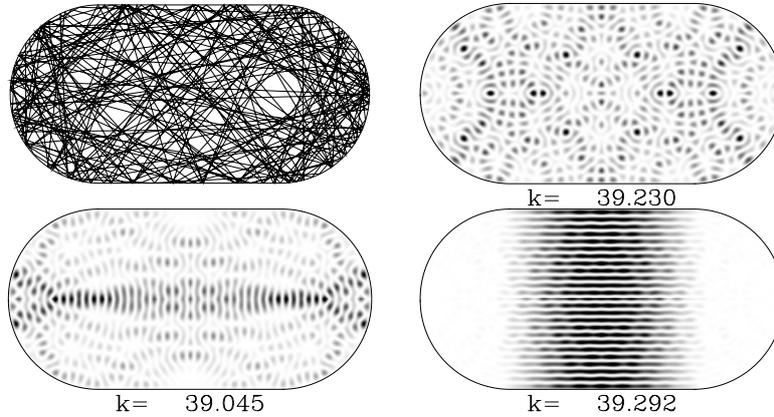


FIG. 1.2. En haut à gauche, une orbite typique du « stade », équidistribuée dans toute la cavité. Les trois autres figures représentent des modes propres de fréquences $k_n \approx 39$. En bas à gauche, une « balafre » sur l'orbite horizontale (instable). À droite, un mode « bouncing ball ».

1.1. Régime et méthodes semiclassiques

Le régime des hautes fréquences nous permet d'utiliser des méthodes d'analyse semiclassique. En effet, l'équation de Helmholtz peut s'interpréter comme une équation de Schrödinger indépendante du temps : en prenant comme constante de Planck effective $\hbar_n = k_n^{-1}$, le mode propre ψ_n satisfait à :

$$(1.3) \quad -\frac{\hbar_n^2 \Delta}{2} \psi_n = \frac{1}{2} \psi_n.$$

Le membre de gauche est le hamiltonien quantique décrivant la dynamique d'une particule libre à l'intérieur de la cavité ; il quantifie le hamiltonien classique (1.2). L'équation ci-dessus décrit donc une particule quantique dans un état stationnaire d'énergie $E = 1/2$. La limite de haute fréquence $k_n \rightarrow \infty$ correspond exactement au régime semiclassique $\hbar = \hbar_n \rightarrow 0$. Dans la suite, on notera indifféremment ψ_n ou ψ_{\hbar} le mode propre ci-dessus.

Le *principe de correspondance* exprime le fait que, dans la limite semiclassique, le *flot de Schrödinger* donné par le propagateur $U^t = e^{it\hbar\frac{\Delta}{2}}$ agissant sur $L^2(X)$, « converge » vers le flot g^t agissant sur T^*X . Plus bas nous explicitons le sens à donner à cette convergence. L'analyse semiclassique a pour objectif de se servir de notre connaissance du flot classique, pour déduire des propriétés du flot de Schrödinger, et en particulier de ses modes stationnaires.

⁴ Le code permettant de calculer les modes propres du stade nous a été gracieusement fourni par Eduardo Vergini [21].

Une première façon de formaliser cette correspondance (pour $X = \mathbb{R}^d$) est de considérer un « paquet d'onde gaussien » localisé à la fois en position (près de x_0) et en impulsion (près de ξ_0 , à l'échelle \hbar^{-1}) :

$$(1.4) \quad \psi_0(x) = \psi_{x_0, \xi_0}(x) = (\pi \hbar)^{-d/4} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{2\hbar}} e^{i\xi_0 \cdot x / \hbar}.$$

Cet état est la meilleure approximation qu'on ait d'une « particule ponctuelle » au point $(x_0, \xi_0) \in T^*X$. Alors, son image par le flot de Schrödinger au temps t , c'est-à-dire $\psi_t = e^{it\hbar \frac{\Delta}{2}} \psi_0$, est localisée dans l'espace des phases autour du point $g^t(x_0, \xi_0)$. On verra plus loin que cette correspondance n'est valide que pour des temps $|t| < C \log \hbar^{-1}$.

1.2. Observables

La correspondance peut aussi s'exprimer en terme d'*observables*. Pour nous une observable est une fonction réelle $A \in C^\infty(T^*X)$ (indépendante de \hbar), dont on se sert pour mesurer la localisation d'une fonction d'onde dans l'espace des phases. On peut lui associer une « observable quantique » $\text{Op}_\hbar(A)$, qui est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(X)$, construit en appliquant à A une procédure de quantification « à l'échelle \hbar ».

Par exemple, sur $X = \mathbb{R}^d$ on peut utiliser la quantification de Weyl

$$(1.5) \quad \text{Op}_\hbar^W(A)f(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int A\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i\xi \cdot (x-y)} f(y) dy d\xi.$$

Le cas le plus simple consiste à prendre $A(x, \xi) = A(x)$ indépendante de l'impulsion : $\text{Op}_\hbar^W(A)$ est simplement l'opérateur de multiplication par $A(x)$. Au contraire, si $A(x, \xi) = P(\xi)$ avec $P(\bullet)$ un polynôme, alors $\text{Op}_\hbar^W(A)$ est l'opérateur différentiel $P\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)$. On incorpore le paramètre \hbar à la définition de $\text{Op}_\hbar^W(A)$ afin que cet opérateur soit naturellement adapté à l'étude des fonctions dont la fréquence d'oscillation est d'ordre \hbar^{-1} . Sur une variété X , on peut définir $\text{Op}_\hbar(A)$ en utilisant (1.5) dans des cartes, et en les recollant grâce à une partition de l'unité. La procédure n'est pas « canonique » : sur \mathbb{R}^d , il existe d'autres quantifications que celle de Weyl, et sur une variété notre définition dépend en plus du choix des cartes. Mais deux quantifications distinctes auront les mêmes propriétés semiclassiques.

Le principe de correspondance implique que la quantification commute presque avec l'évolution d'une observable. Cette propriété est formalisée par le théorème d'Egorov :

$$(1.6) \quad \|e^{-it\hbar \frac{\Delta}{2}} \text{Op}_\hbar(A) e^{it\hbar \frac{\Delta}{2}} - \text{Op}_\hbar(A \circ g^t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}_t(\hbar) \quad \textbf{(Egorov)}$$

Là encore, cette correspondance semiclassique n'est valable que pour des temps $|t| < c \log \hbar^{-1}$, pour un c pas trop grand. En effet, pour des temps $|t| > C \log \hbar^{-1}$, l'observable $A \circ g^t$ oscille sur des échelles $\ll \hbar$: il ne s'agit alors plus du tout d'une « observable classique ». Plus loin on définira précisément un **temps d'Ehrenfest** marquant la rupture de la correspondance, et qui sera au cœur de nos résultats.

1.3. Mesures semiclassiques

En mécanique quantique, la fonction $|\psi(x)|^2$ décrit la probabilité de trouver la particule à la position $x \in X$. Un appareil de mesure ne pourra tester que la probabilité intégrée sur une petite région (un « pixel ») $\int_B |\psi(x)|^2 dx$, qu'on peut aussi écrire comme un élément de matrice diagonal $\langle \psi, \mathbb{1}_B \psi \rangle$, où $\mathbb{1}_B$ est l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique sur B .

De même, pour une observable $A(x, \xi)$ à support dans une petite région de l'espace des phases, l'élément de matrice $\langle \psi, \text{Op}_{\hbar}(A)\psi \rangle$ nous renseigne sur la probabilité que la particule se trouve dans cette région. Du fait de la linéarité de la quantification $A \mapsto \text{Op}_{\hbar}(A)$, cet élément de matrice peut être représenté par le biais d'une distribution μ_{ψ} sur T^*X , définie par

$$\mu_{\psi}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi, \text{Op}_{\hbar}(A)\psi \rangle$$

pour $A \in C_0^{\infty}(T^*X)$. Cette distribution (qui dépend de ψ mais aussi de l'échelle \hbar) est appelée « mesure de Wigner de l'état ψ », bien qu'elle ne soit généralement pas positive. Sa projection sur X est donnée par la mesure de probabilité $|\psi(x)|^2 dx$, mais μ_{ψ} contient plus d'information : comme elle tient compte de la *phase* de la fonction $\psi(x)$, elle décrit également la direction locale de propagation de la particule, autrement dit son impulsion⁵. On appelle aussi μ_{ψ} un *relevé microlocal* de la mesure de probabilité $|\psi(x)|^2 dx$. Comme le flot g^t agit sur T^*X , la mesure de Wigner est un outil adéquat pour faire le lien entre flot classique et flot de Schrödinger.

Pour cerner les propriétés de localisation des modes propres ψ_n , nous allons donc considérer leurs mesures de Wigner $\mu_{\psi_n} = \mu_n$ (dans les échelles \hbar_n). Il est difficile de décrire ces distributions individuellement, par contre nous chercherons à comprendre les *valeurs d'adhérence* de la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$, au sens de la topologie faible. Une telle valeur d'adhérence μ est appelée une **mesure semiclassique** du flot géodésique, ou de la variété X . Les propriétés de base de la quantification impliquent que toute mesure semiclassique μ est

- une mesure de probabilité sur la couche d'énergie $S^*X = \{(x, \xi) : |\xi| = 1\}$
- indépendante du choix précis de quantification $A \mapsto \text{Op}_{\hbar}(A)$
- *invariante* par le flot géodésique : $\mu = (g^t)_*(\mu), \forall t \in \mathbb{R}$.

La dernière propriété découle directement du théorème d'Egorov (1.6). Ainsi, à partir des modes quantiques stationnaires $(\psi_n)_n$, on a fabriqué une mesure de probabilité μ sur S^*X , classiquement invariante, qui décrit les propriétés asymptotiques de localisation des états d'une sous-suite $(\psi_{n_j})_{j \geq 1}$.

1.4. Toute mesure invariante est-elle une mesure semiclassique ?

En général, le flot géodésique sur S^*X possède de nombreuses mesures de probabilité invariantes. La mesure de Liouville, définie comme la désintégration sur S^*X du volume symplectique $dx d\xi$, est en quelque sorte la « mesure invariante naturelle » sur S^*X . Par la suite nous la noterons L .

⁵ On peut montrer que toute l'information sur l'état ψ (excepté une phase globale) est contenue dans la distribution μ_{ψ} .

De plus, chaque géodésique périodique supporte une unique mesure de probabilité invariante. Les flots chaotiques que nous considérons possèdent un ensemble dénombrable de telles géodésiques, qui remplit S^*X de façon dense.

Pour une variété donnée, on est donc conduit à la question suivante :

Parmi toutes les mesures g^t -invariantes sur S^*X , quelles sont celles qui apparaissent comme mesures semiclassiques ? Autrement dit, à quelles mesures invariantes peuvent ressembler les mesures de Wigner (μ_n) dans la limite de haute fréquence ?

On ne dispose pas d'une réponse d'ensemble à cette question, valable pour tous les flots géodésiques. On se restreint alors à des flots hamiltoniens ayant des propriétés dynamiques « bien comprises » : systèmes complètement intégrables d'une part (une bonne introduction est la thèse d'habilitation de S.Vũ Ngọc [19]), ou au contraire systèmes « fortement chaotiques ».

2. Flots géodésiques chaotiques

Nous nous intéresserons dans la suite à des flots géodésiques chaotiques. Le terme « chaotique » est assez vague, nous donnerons des hypothèses dynamiques plus précises. Les simulations numériques sont généralement plus faciles à faire pour des billards euclidiens, par contre l'analyse semiclassique est plus efficace dans le cas de variétés compactes sans bord. C'est pourquoi le modèle de base sera celui des variétés compactes de courbure strictement négative, dont les propriétés chaotiques ont été comprises depuis longtemps [3]. Le flot géodésique sur ces variétés est uniformément hyperbolique, autrement dit il a la propriété d'Anosov : en tout point $\rho \in S^*X$, l'espace tangent $T_\rho(S^*X)$ se décompose en

$$T_\rho(S^*X) = E^+(\rho) \oplus E^-(\rho) \oplus \mathbb{R}X_H(\rho)$$

où le champ de vecteur X_H engendre le flot géodésique, et E^\mp est l'espace stable (resp. instable), tel que pour tout $v \in E^\mp(\rho)$, et pour tout $t \geq 0$, $\|dg^{\pm t}(\rho).v\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|$ avec des constantes $C > 0$ et $\lambda > 0$ uniformes. Ces propriétés traduisent une très forte instabilité par rapport à une variation des conditions initiales. Mais cette instabilité s'exprime en termes mathématiques si forts, que ces flots sont en réalité bien compris : en particulier, un tel flot est *ergodique* pour la mesure de Liouville L , et *rapidement mélangeant*.

2.1. Ergodicité quantique

La propriété chaotique « par défaut » est l'**ergodicité** du flot sur la couche d'énergie S^*X , par rapport à la mesure de Liouville. Elle exprime le fait que S^*X ne peut pas être divisée en deux sous-ensembles invariants ayant tous deux une mesure strictement positive. Une définition plus « dynamique » est la suivante : la trajectoire d'un point $\rho \in S^*X$ *typique* pour la mesure de Liouville va recouvrir S^*X de façon uniforme aux temps longs (v. fig. 1.2). Cette propriété est vérifiée pour les variétés hyperboliques que nous étudions plus bas. Elle l'est également pour certains flots moins chaotiques, par exemple certains billards euclidiens polygonaux.

La seule hypothèse d'ergodicité implique déjà une forte contrainte sur la localisation des modes propres de haute fréquence : ceux-ci sont *presque tous* équidistribués sur la couche d'énergie S^*X .

Théorème 2.1 (Ergodicité quantique). [20, 22, 7] *Supposons que le flot géodésique est ergodique pour la mesure de Liouville sur S^*X . Alors, il existe une sous-suite $(n_j) \subset \mathbb{N}$ de densité 1, telle que les mesures de Wigner des modes propres associés vérifient*

$$\mu_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \text{Liouville.}$$

Le terme « densité 1 » signifie que la fraction de modes propres concernée tend asymptotiquement vers un. Par conséquent, s'il existe une sous-suite convergeant vers une mesure semiclassique différente de Liouville, elle sera faite de **modes exceptionnels**. L'ergodicité quantique est une conséquence de l'ergodicité classique, mais la réciproque est fautive : des billards « quantiquement ergodiques » mais possédant deux sous-ensembles invariants de mesures positives ont été exhibés par B. Gutkin [10].

L'article initial de Shnirelman [20] décrit les grandes lignes de la preuve, sans donner de détails techniques, en particulier, sans définir de quantification positive. Zelditch [22] a donné une preuve complète pour une surface compacte de courbure constante -1 , puis Colin de Verdière [7] a écrit la preuve sur une variété riemannienne compacte, sous la seule hypothèse d'ergodicité.

Donnons les grandes lignes de l'argument [23]. On remarque d'abord que les distributions de Wigner μ_n sont « proches » de mesures de probabilité : il existe une suite de mesures de probabilité $\tilde{\mu}_n$ telles que, pour toute observable $A(x, \xi)$, on ait $\mu_n(A) = \tilde{\mu}_n(A) + \mathcal{O}(\hbar_n)$. Ces mesures positives sont construites à l'aide d'une quantification positive, c'est-à-dire que $\text{Op}_{\hbar}(A)$ est un opérateur positif si A est une fonction positive. Par exemple la quantification « anti-Wick » sur \mathbb{R}^d fournit les *mesures de Husimi* $\tilde{\mu}_n$. Par un *calcul de trace*, on montre, pour toute observable $A \in C_0^\infty(T^*X)$, la loi de Weyl généralisée :

$$(2.1) \quad \sum_{n|k_n \leq K} \int_{T^*X} A d\tilde{\mu}_n \sim C_X K^d \int_{S^*X} A dL, \quad K \longrightarrow +\infty.$$

On en déduit la loi de Weyl usuelle : soit $\mathcal{N}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{n, k_n \leq K\}$ le nombre de modes propres de fréquence $k_n \leq K$, alors

$$\mathcal{N}(K) \sim C_X K^d,$$

ainsi que la convergence *en moyenne* des mesures $\tilde{\mu}_n$ vers la mesure de Liouville sur S^*X :

$$\frac{1}{\mathcal{N}(K)} \sum_{k_n \leq K} (\tilde{\mu}_n(A) - L(A)) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0.$$

L'étape suivante dans la description statistique des $(\tilde{\mu}_n(A))$ consiste à estimer leur variance, souvent appelée la *variance quantique* :

$$\text{Var}_K(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathcal{N}(K)} \sum_{k_n \leq K} |\tilde{\mu}_n(A) - L(A)|^2.$$

En utilisant le théorème d'Egorov et l'ergodicité classique, on va montrer que cette variance tend aussi vers zéro dans la limite de haute fréquence (le théorème d'ergodicité quantique en découlera de manière directe).

Le théorème d'Egorov implique que les mesures $\tilde{\mu}_n$ sont presque invariantes : pour un temps $T > 0$ fixé, on a

$$\tilde{\mu}_n(A) = \tilde{\mu}_n(A_T) + o_{n \rightarrow \infty}(1), \quad \text{où } A_T = T^{-1} \int_0^T A \circ g^t dt.$$

Comme les $\tilde{\mu}_n$ sont des mesures de probabilité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la borne supérieure

$$\text{Var}_K(A) \leq \frac{1}{\mathcal{N}(K)} \sum_{k_n \leq K} \tilde{\mu}_n((A_T - L(A))^2) + o_{K \rightarrow \infty}(1).$$

La convergence en moyenne montre que le membre de droite tend vers $L((A_T - L(A))^2)$. Enfin, l'ergodicité du flot implique que cette quantité devient petite lorsque T est grand. On a ainsi prouvé que la variance quantique $\text{Var}_K(A)$ tend vers 0 dans la limite de haute fréquence $K \rightarrow +\infty$. Pour en déduire la convergence de $\tilde{\mu}_n(A)$ vers $L(A)$ pour une sous-suite de densité 1, on invoque un argument standard dû à Tchebychev.

L'ergodicité quantique a donc été montrée en utilisant des outils semiclassiques assez standard, essentiellement la loi de Weyl généralisée (qui provient d'une formule des trace) et la positivité asymptotique des distributions de Wigner.

2.2. « Balafres » et mesures semiclassiques exceptionnelles ?

Les calculs numériques de modes propres de certains billards chaotiques ont révélé des structures suprenantes : en 1984, Heller observe que certains modes propres du « stade » (dont l'ergodicité a été montrée par Bunimovich) se concentrent le long de géodésiques instables; il baptise ce phénomène « cicatrice », ou « balafre » laissée par l'orbite périodique sur le mode stationnaire (v. fig. 1.2). Alors qu'on comprend bien comment un mode propre (ou au moins un *quasimode*⁶) peut se concentrer le long d'une orbite *stable*, une localisation le long d'une orbite *instable* est beaucoup plus difficile à justifier (un contre-argument est présenté dans la section suivante). La concentration observée par Heller est avant tout visuelle; les études plus quantitatives qui ont suivi (v. par ex. [5]) tendent à exclure la possibilité d'un poids de probabilité positif près de l'orbite périodique, qui aurait indiqué l'existence d'une mesure semiclassique chargeant l'orbite (ou « grosse balafre »⁷). Des études numériques ont également été réalisées sur certaines surfaces compactes de courbure négative constante; elles n'ont pas montré la présence de balafres [4].

Au niveau théorique, les résultats les plus précis concernant la localisation de modes propres concernent des variétés hyperboliques (de courbure -1) dites « arithmétiques » : ces surfaces sont obtenues en quotientant l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 par un groupe discret co-compact issu d'une algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} . Il existe alors une algèbre commutative d'opérateurs autoadjoints (opérateurs de

⁶ Un quasimode de précision ε est une solution de $\|(-\hbar^2 \Delta - I)\psi\| \leq \varepsilon \|\psi\|$. L'existence d'un tel quasimode implique l'existence d'une valeur propre de $-\hbar^2 \Delta$ dans $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ — mais ψ n'a aucune raison d'être proche d'une fonction propre. Dans la limite $\hbar \rightarrow 0$ cette notion n'a d'intérêt que si $\varepsilon = \varepsilon(\hbar)$ tend vers 0 assez vite. On parle de quasimode, sans donner la précision, quand $\varepsilon = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$.

⁷ Nous proposons cette traduction pour le terme « strong scar » utilisé en anglais.

Hecke) qui commutent avec le laplacien : en ce sens, le système a une famille dénombrable de « symétries ». Il est naturel de s'intéresser aux bases orthonormées formées de modes propres simultanés de cette algèbre et du laplacien, appelés modes de Hecke. Rudnick et Sarnak ont montré [18] que les mesures semiclassiques associées à ces modes propres ne peuvent pas charger une géodésique périodique (pas de « grosse balafre »). Ce résultat, ainsi que les études numériques mentionnées plus haut, leur ont suggéré la conjecture suivante :

Conjecture 2.2 (Unique ergodicité quantique). *Soit X une variété compacte de courbure strictement négative. Pour toute base propre orthonormée, la suite de mesures de Wigner $(\mu_k)_{k \geq 0}$ admet une unique valeur d'adhérence, qui est la mesure de Liouville.*

Cette conjecture va plus loin que l'absence de « grosse balafre » : elle exclut également toutes les mesures invariantes « fractales ». La conjecture a été prouvée par Lindenstrauss dans le cas des modes propres de Hecke des surfaces arithmétiques [15]. Une première étape [6], utilisant fortement les symétries arithmétiques de la variété, a consisté à montrer que les composantes ergodiques d'une mesure semiclassique ont toutes une *entropie* strictement positive (ce qui exclut déjà les grosses balafres). L'utilisation de l'entropie comme indicateur de localisation est aussi au cœur de nos travaux.

Remarque 2.3. Le billard « stade » possède une famille d'orbites stables, qui sont les orbites verticales reliant les deux côtés horizontaux. Heller a aussi mis en évidence un autre type de modes propres du stade, appelés les modes « bouncing ball », qui sont localisés sur cette famille d'orbites verticales (v. fig. 1.2). Contrairement aux « balafres » décrites ci-dessus, on pense que les mesures semiclassiques associées à ces modes sont effectivement supportées par ces orbites verticales. Hassell a récemment montré que, pour un « stade » générique, il existe effectivement des mesures semiclassiques différentes de Liouville [12].

2.3. Localisation-délocalisation sur une orbite instable

Essayons, par un argument naïf, de construire un quasimode localisé sur une orbite périodique instable contenant un point (x_0, ξ_0) . Nous verrons tout de suite apparaître la difficulté principale : le comportement du propagateur de Schrödinger au temps d'Ehrenfest.

Pour construire un tel quasimode, on part d'un paquet d'onde gaussien du type (1.4) localisé dans un $\sqrt{\hbar}$ -voisinage de (x_0, ξ_0) , et on le fait évoluer par le flot de Schrödinger. En moyennant sur un intervalle de temps $[-T/2, T/2]$, on obtient un quasimode

$$(2.2) \quad \Psi_T = \int_{-T/2}^{T/2} U^t \psi_0 dt, \quad U^t \stackrel{\text{def}}{=} e^{i \frac{t}{\hbar} (\hbar^2 \Delta + 1)}.$$

Une intégration par parties montre que l'erreur

$$\mathcal{E}(\Psi_T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|-\frac{\hbar^2 \Delta - 1}{2} \Psi_T\|}{\|\Psi_T\|} \quad \text{est égale à} \quad \frac{\|U^{T/2} \psi_0 - U^{-T/2} \psi_0\|}{\|\Psi_T\|}.$$

Pour minimiser cette erreur on voudrait que les états $U^{T/2}\psi_0$ et $U^{-T/2}\psi_0$ soient proches; comme $U^t\psi_0$ se propage le long de l'orbite, il est naturel de prendre pour T la période T_0 de l'orbite. Malheureusement, l'hyperbolicité de la dynamique transverse à l'orbite « allonge » l'état gaussien $U^{T_0/2}\psi_0$ le long de la direction instable sur une longueur $\sqrt{\hbar}e^{\lambda T_0/2}$, où λ est l'exposant de Liapounov maximal de l'orbite. Inversement, l'état $U^{-T_0/2}\psi_0$ est allongé le long de la direction stable, de sorte que $U^{T_0/2}\psi_0$ et $U^{-T_0/2}\psi_0$ sont loin d'être colinéaires. On obtient alors un quasimode de précision $\mathcal{E}(\Psi_{T_0}) \sim \hbar$, ce qui n'est pas très bon. Pour diminuer l'erreur, on essaie alors d'intégrer sur des intervalles plus longs, en prenant T dépendant de \hbar et tendant vers l'infini. Cependant, lorsque T devient plus grand que le *temps d'Ehrenfest*

$$(2.3) \quad T_E = \frac{\log \hbar^{-1}}{\lambda},$$

l'état $U^T\psi_0$ se *délocalise* le long de la direction instable sur une longueur $\gg 1$, et remplit peu à peu tout S^*X . Le quasimode Ψ_T n'est donc plus totalement localisé autour de l'orbite. Cette analyse sommaire montre qu'on ne peut espérer faire mieux que de construire des quasimodes localisés d'erreur $C\hbar/|\log \hbar|$.

2.4. Un modèle jouet ayant des « grosses balafres »

Parallèlement à l'étude des flots géodésiques chaotiques, on a construit des modèles de transformations symplectiques (à temps discret) sur des espaces des phases compacts, qui ont des propriétés chaotiques. L'exemple le plus connu est la transformation du « chat d'Arnold » sur le tore bidimensionnel, qui correspond à une transformation linéaire $(x, \xi) \rightarrow M(x, \xi)$, où $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ vérifie $|\text{tr} M| > 2$ (v. fig. 2.1). Cette transformation peut être quantifiée en une famille de propagateurs unitaires dépendant d'un paramètre \hbar [13]. De tels propagateurs, appelés « applications quantiques », ont servi de laboratoire en chaos quantique, sur les plans numérique et analytique.

Concernant la classification des mesures semiclassiques, le modèle du « chat d'Arnold quantique » a fourni des résultats remarquables [8]. En effet, pour certaines valeurs (très particulières) de \hbar , le propagateur quantique est périodique, de période $T_{\hbar} \approx 2T_E$, où T_E est le temps d'Ehrenfest (2.3). Grâce à cette périodicité, le quasimode (2.2) pour $T = T_{\hbar}$ est un *vrai mode propre*. En prenant un état ψ_0 localisé sur un point périodique (x_0, ξ_0) , on montre [8] que $\Psi_{T_{\hbar}}$ est à moitié localisé sur l'orbite périodique, et à moitié équidistribué (la mesure de Husimi de $\Psi_{T_{\hbar}}$ est représentée sur la fig. 2.1). Autrement dit, ces modes propres convergent vers la mesure semiclassique

$$(2.4) \quad \mu = \frac{1}{2}(\delta_O + L)$$

où L est la mesure symplectique $dx d\xi$ et δ_O est une mesure singulière (ici, une combinaison de masses de Dirac) portée par la trajectoire de (x_0, ξ_0) .

Ces résultats montrent que la conjecture d'unique ergodicité quantique est *fausse* lorsqu'on la transfère à des systèmes chaotiques plus généraux que les flots géodésiques. Toutefois, on montre que le « chat d'Arnold quantique » n'admet pas de mesure semiclassique purement supportée par une orbite périodique (une

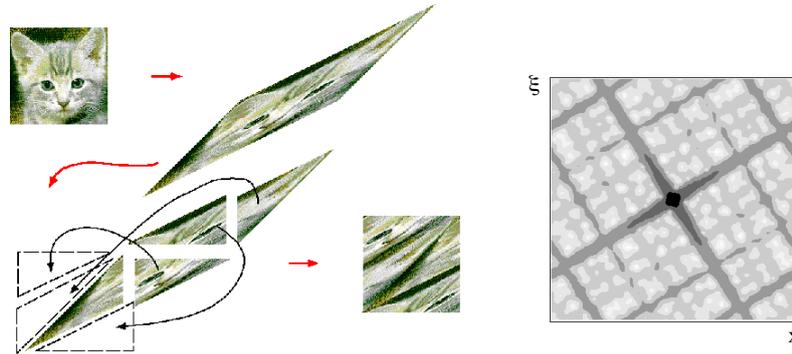


FIG. 2.1. À gauche, la transformation du « chat d'Arnold » sur le tore (©Leon Poon). À droite, mesure de Husimi d'un mode propre Ψ_{T_h} à moitié localisé sur un point fixe ($\hbar^{-1} \approx 3000$).

« balafre totale »), car le poids $1/2$ porté par la balafre dans la mesure (2.4) est maximal [9].

Dans la section suivante, qui porte sur nos résultats récents, on verra réapparaître ce facteur $1/2$, cette fois-ci dans le cas des flots géodésiques.

3. Bornes entropiques sur les mesures semiclassiques

Dans cette section on se place dans le cas d'une variété compacte (sans bord) de courbure strictement négative. Comme on l'a dit plus haut, un tel flot possède de nombreuses mesures invariantes. Une façon de caractériser la « complexité » d'une mesure invariante est de lui associer son **entropie de Kolmogorov–Sinai** : il s'agit d'un réel $h_{KS}(\mu) \geq 0$, que nous définirons précisément plus tard. Contentons-nous pour le moment d'en donner quelques propriétés :

- une mesure singulière portée par une trajectoire périodique est d'entropie nulle ;
- l'entropie atteint son maximum h_{\max} pour une unique mesure invariante, appelée mesure de Bowen-Margulis, de support S^*X ;
- l'inégalité de Ruelle-Pesin affirme que

$$(3.1) \quad h_{KS}(\mu) \leq \int \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^+ d\mu,$$

où les fonctions $\lambda_1^+(\rho) \geq \lambda_2^+(\rho) \geq \dots \geq \lambda_{d-1}^+(\rho) > 0$, définies μ -presque partout, sont les exposants de Liapounov positifs du flot. En courbure strictement négative, on a égalité si et seulement si μ est la mesure de Liouville [14] ;

- en courbure -1 , cette inégalité se lit simplement $h_{KS}(\mu) \leq d - 1$, et dans ce cas la mesure de Bowen-Margulis coïncide avec la mesure de Liouville ;
- h_{KS} est affine (cela ne se verra pas dans la définition!).

Ces propriétés montrent que l'entropie permet de comprendre la *localisation* d'une mesure invariante. Une borne inférieure positive sur l'entropie d'une mesure invariante signifie que celle-ci est au moins *partiellement délocalisée*, c'est-à-dire qu'elle

n'est pas une simple combinaison convexe de mesures portées par des trajectoires périodiques.

Le premier résultat concernant l'entropie des mesures semiclassiques sur les variétés de courbure strictement négative va exactement en ce sens.

Théorème 3.1. [1] *Soit X une variété riemannienne compacte, telle que le flot géodésique ait la propriété d'Anosov. Alors toute mesure semiclassique μ sur S^*X vérifie*

$$h_{KS}(\mu) > 0.$$

Une version plus quantitative du théorème permet de contrôler le *support* des mesures semiclassiques. Énonçons-le pour le cas de courbure constante :

Théorème 3.2. [1] *Soit X une variété compacte de dimension d et de courbure -1 . Alors, pour toute mesure semiclassique μ , le support de μ a une dimension de Hausdorff au moins égale à d .*

Remarquons que la dimension de S^*X est $2d - 1$. Ce résultat exclut également les mesures invariantes ayant un support trop fin. Nous avons ensuite précisé ces résultats, au moins dans les cas où la courbure ne varie pas trop :

Théorème 3.3. [2] *Soit X une variété de dimension d , ayant un flot géodésique Anosov, et μ une mesure semiclassique. Soient $\lambda_j^+(\rho)$ les exposants de Liapounov positifs, et $\lambda_{\max} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{\rho \in S^*X} \|dg_\rho^t\|$ le taux d'expansion maximal du flot. Alors l'entropie de μ satisfait à l'inégalité suivante :*

$$(3.2) \quad h_{KS}(\mu) \geq \int \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^+ d\mu - \frac{d-1}{2} \lambda_{\max}.$$

En courbure constante -1 , cette borne s'écrit $h_{KS}(\mu) \geq \frac{d-1}{2}$.

On peut facilement adapter l'inégalité au modèle des applications quantiques sur le tore. Dans le cas du « chat d'Arnold », la borne inférieure s'écrit $h_{KS}(\mu) \geq \frac{\lambda}{2}$, où λ est l'exposant de Liapounov uniforme. Cette borne inférieure est atteinte par la mesure semiclassique (2.4) ayant une « demi-balafre ».

Le membre de droite de (3.2) peut être négatif, ce qui rend l'inégalité triviale, si la courbure sectionnelle varie suffisamment sur X . Une borne inférieure plus naturelle serait la suivante :

$$(3.3) \quad h_{KS}(\mu) \geq \frac{1}{2} \int \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^+ d\mu.$$

Cette borne a été prouvée récemment par G. Rivière dans le cas de surfaces ($d = 2$) de courbure **négative ou nulle** [17]. B. Gutkin a montré une borne analogue dans le cas de certaines applications quantiques ayant un exposant de Liapounov variable [11]; il a également exhibé des modes propres pour lesquels l'égalité est réalisée.

Compte tenu de l'inégalité de Ruelle-Pesin (3.1), pour prouver l'ergodicité quantique unique dans le cas des flots géodésiques Anosov, il faudrait se débarrasser du facteur $\frac{1}{2}$ dans (3.3).

4. Éléments de preuve du Théorème 3.3

4.1. Entropie d'une mesure invariante

Pour définir l'entropie d'une mesure μ sur S^*X invariante par le flot géodésique, on partitionne S^*X en un nombre fini de sous-ensembles mesurables (qu'on suppose de diamètres « petits ») :

$$S^*X = \sqcup_{k=1}^K P_k.$$

L'entropie de la mesure μ vis-à-vis de cette partition,

$$h_1(\mu, P) = - \sum_{k=1}^K \mu(P_k) \log \mu(P_k),$$

nous renseigne sur la manière avec laquelle la mesure μ est distribuée entre les P_k .

On considère ensuite des raffinements de la partition P obtenus en itérant le flot. Pour un temps entier $n > 0$ et une suite $\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}$ (avec $\alpha_i \in \{1, \dots, K\}$), on considère l'ensemble

$$P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\alpha_0} \cap g^{-1}P_{\alpha_1} \cap \dots \cap g^{-(n-1)}P_{\alpha_{n-1}},$$

formé des points contenus dans P_{α_0} , dont la trajectoire au temps 1 est dans P_{α_1} , au temps 2 dans P_{α_2} , ... et en $P_{\alpha_{n-1}}$ au temps $n-1$. Pour chaque $n > 0$, les ensembles $(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}})$ forment également une partition de S^*X : c'est le « raffinement au temps n » de la partition P . Du fait de l'hyperbolicité de la dynamique, ces ensembles sont très contractés dans la direction instable lorsque n est grand. L'entropie au temps n est l'entropie relative à cette partition raffinée :

$$h_n(\mu, P) = - \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}} \mu(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}}) \log \mu(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}}).$$

Grâce à la propriété de sous-additivité $h_{n+m}(\mu, P) \leq h_n(\mu, P) + h_m(\mu, P)$, la limite

$$h_{KS}(\mu, P) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n(\mu, P)}{n} = \inf_n \frac{h_n(\mu, P)}{n}$$

est bien définie, elle représente le **taux moyen de décroissance exponentielle** des probabilités $\mu(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}})$. Pour un flot Anosov, cette limite est indépendante de la partition P dès que celle-ci a un diamètre suffisamment petit, et elle définit $h_{KS}(\mu)$, l'entropie de la mesure μ .

Le fait que $h_{KS}(\mu, P)$ soit définie par un inf se traduit par la propriété de semi-continuité supérieure suivante : si μ_k est une suite de mesures de probabilités (g^t) -invariantes qui converge faiblement vers μ , alors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} h_{KS}(\mu_k, P) \leq h_{KS}(\mu, P).$$

Autrement dit, les bornes inférieures sur $h_{KS}(\mu_k, P)$ passent à la limite.

Une idée très naïve est donc d'essayer de minorer l'entropie de nos distributions de Wigner μ_n , et de passer à la limite $n \rightarrow +\infty$. Évidemment, cela ne peut pas fonctionner, car les μ_n sont des *distributions*, et ne sont pas (g^t) -invariantes. En fait, la situation est la suivante : nous avons une suite de systèmes dynamiques

non-commutatifs (le flot de Schrödinger U^t agissant sur $L^2(X)$, avec un état invariant ψ_{\hbar}), convergeant quand $\hbar \rightarrow 0$ vers un système commutatif ((g^t) agissant sur T^*X , avec la mesure invariante μ).

D'où l'idée d'essayer de travailler avec une « entropie quantique ».

4.2. Une entropie quantique

Qu'est-ce qu'une partition quantique de T^*X ? Dans notre cas, il s'agira d'une famille d'opérateurs $\hat{P} = (\hat{P}_k)_{k=1, \dots, K}$ bornés sur $L^2(X)$, satisfaisant l'identité

$$\sum_{k=1}^K \hat{P}_k^* \hat{P}_k = Id_{L^2}.$$

Par exemple, on peut partir d'une partition de la variété $X = \sqcup_{k=1}^K P_k$ (qu'on peut relever en une partition de S^*X ou de T^*X), et considérer les opérateurs \hat{P}_k de multiplication par la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{P_k}$ ⁸.

On considère une sous-suite de modes propres $(\psi_{\hbar})_{\hbar \rightarrow 0}$ convergeant vers une mesure semiclassique μ . La partition quantique est utilisée pour découper ψ_{\hbar} en K composantes $\hat{P}_k \psi_{\hbar}$. À chacune on associe un poids de probabilité $\|\hat{P}_k \psi_{\hbar}\|^2$. Par le choix des opérateurs \hat{P}_k , chaque composante représente effectivement la partie de ψ_{\hbar} localisée dans l'élément $P_k \subset X$. À partir de ces « probabilités quantiques », on peut considérer l'**entropie quantique**

$$h(\psi_{\hbar}, \hat{P}) = - \sum_k \|\hat{P}_k \psi_{\hbar}\|^2 \log \|\hat{P}_k \psi_{\hbar}\|^2.$$

Comme dans la section précédente, on va raffiner cette partition, mais cette fois en utilisant le flot de Schrödinger. On note $\hat{P}_k(t) = U^{-t} \hat{P}_k U^t$, et pour tout temps $n > 0$ on découpe ψ_{\hbar} en composantes $\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \psi_{\hbar}$, où

$$(4.1) \quad \hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{P}_{\alpha_{n-1}}(n-1) \dots \hat{P}_{\alpha_1}(1) \hat{P}_{\alpha_0} = U^{-n+1} \hat{P}_{\alpha_{n-1}} U^1 \dots U^1 \hat{P}_{\alpha_1} U^1 \hat{P}_{\alpha_0}.$$

La forme de droite montre que chaque opérateur correspond à une succession d'évolutions (par U^1) et de « projections » sur P_{α_i} . On a donc envie d'interpréter chaque poids $\|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \psi_{\hbar}\|^2$ comme la probabilité, pour une particule dans l'état ψ_{\hbar} , de visiter successivement P_{α_0} , puis P_{α_1} au temps 1... et enfin en $P_{\alpha_{n-1}}$ au temps $n - 1$. Il faut néanmoins manier avec précaution cette interprétation probabiliste, car les opérateurs $\hat{P}_{\alpha_k}(k)$ ne commutent pas entre eux.

Malgré tout, le théorème d'Egorov implique que chaque composante représente la partie de ψ_{\hbar} localisée dans le sous-ensemble $P_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}$ de T^*X . Par conséquent, l'hypothèse de convergence des distributions de Wigner $\mu_{\hbar} \rightarrow \mu$ implique que pour chaque suite $\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$,

$$\|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \psi_{\hbar}\|^2 \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \mu(P_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}).$$

⁸ En pratique, on remplace ces dernières par des fonctions lisses $\mathbb{1}_{P_k}^{reg}$ satisfaisant à l'égalité $\sum_{k=1}^K |\mathbb{1}_{P_k}^{reg}(x)|^2 = 1$, afin que le calcul pseudo-différentiel s'applique aux opérateurs \hat{P}_k .

On construit alors l'entropie quantique raffinée au temps n ,

$$(4.2) \quad h_n^+(\psi_{\hbar}, \hat{P}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}} \|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \psi_{\hbar}\|^2 \log \|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \psi_{\hbar}\|^2.$$

Pour n fixé, celle-ci converge vers $h_n(\mu, P)$ dans la limite semiclassique. Malheureusement, au niveau quantique on n'a pas la sous-additivité $h_{n+m} \leq h_n + h_m$ (la preuve de cette inégalité échoue à cause du fait que les opérateurs ne commutent pas). Nous ne considérerons donc jamais la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n^+(\psi_{\hbar}, \hat{P})}{n}$, qui serait l'analogie quantique de l'entropie de Kolmogorov-Sinai. Il nous faudra prendre *simultanément* les limites $n \rightarrow \infty$ et $\hbar \rightarrow 0$.

En poussant le théorème d'Egorov dans ses retranchements, on montre qu'on a une *sous-additivité approchée*

$$h_{n+m}^+(\psi_{\hbar}, \hat{P}) \leq h_n^+(\psi_{\hbar}, \hat{P}) + h_m^+(\psi_{\hbar}, \hat{P}) + o(1)$$

quand $\hbar \rightarrow 0$ et pour $n + m$ inférieur au temps d'Ehrenfest $T_E = \frac{\log \hbar^{-1}}{\lambda_{\max}}$. Cela implique

$$(4.3) \quad \frac{1}{n} h_n^+(\psi_{\hbar}, \hat{P}) \leq \frac{1}{n_o} h_{n_o}(\mu, P) + o_{\hbar \rightarrow 0}(1),$$

si n_o est fixé et $n > n_o$ est inférieur au temps d'Ehrenfest.

4.3. Borne inférieure sur l'entropie quantique

Le cœur de la preuve consiste à obtenir une borne inférieure sur l'entropie quantique (4.2). Pour simplifier, supposons dorénavant que X est à courbure constante -1 . Une première étape consiste à étudier les opérateurs (4.1) pour des « temps logarithmiques ». On montre l'*estimée dispersive hyperbolique* suivante :

Proposition 4.1. *Fixons $\delta > 0$ (petit), \mathcal{K} (grand). Pour tout $\hbar < \hbar_{\mathcal{K}}$, on considère une fonction de troncature $\chi_{\hbar} \in C_c^\infty(T^*X)$ à support dans un voisinage de taille $\hbar^{1-\delta}$ de S^*X . Alors, pour toute suite $\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$ de longueur $n \leq \mathcal{K} |\log \hbar|$, on a*

$$(4.4) \quad \|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \text{Op}_{\hbar}(\chi_{\hbar})\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \min\left(1, \hbar^{-\frac{d-1+\delta}{2}} e^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)n}\right).$$

En particulier, la même borne supérieure s'applique à $\|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} \psi_{\hbar}\|$.

Il faut comprendre l'opérateur $\text{Op}_{\hbar}(\chi_{\hbar})$ comme une projection spectrale sur la fenêtre $[1 - \hbar^{1-\delta}, 1 + \hbar^{1-\delta}]$ du spectre de $-\hbar^2 \Delta$. L'estimée (4.4) indique que, pour un état ψ localisé en énergie, la succession de « projections » \hat{P}_{α_i} et d'itérations par le flot unitaire U^1 ne peut préserver indéfiniment la norme de ψ , mais contracte forcément celle-ci à partir du temps d'Ehrenfest $T_E = |\log \hbar|$.

La borne (4.4) est obtenue par un développement WKB du noyau de l'opérateur $\hat{P}_{\alpha_{n-1}} U^1 \dots U^1 \hat{P}_{\alpha_1} U^1 \hat{P}_{\alpha_0} \text{Op}_{\hbar}(\chi_{\hbar})$ intervenant dans l'écriture (4.1) : son noyau $K_{\hbar}(x, y)$ est C^∞ , et admet un développement limité complètement explicite en puissances de \hbar , s'exprimant comme une somme, portant sur les géodésiques de longueur $\approx n$ allant de x à y , de certaines quantités classiques.

La nouveauté est que nos développements sont uniformes pour les temps $n \leq \mathcal{K} |\log \hbar|$. Grâce aux projections \hat{P}_{α_j} à chaque pas de temps, on ne rencontre pas

une des difficultés usuelles de ces développements asymptotiques aux temps longs : la croissance exponentielle du nombre de géodésiques. Bien que le nombre total de géodésiques allant de $x \in P_{\alpha_0}$ à $y \in P_{\alpha_{n-1}}$ en un temps $\approx n$ croisse exponentiellement avec n , en imposant les contraintes $g^j(\rho) \in P_{\alpha_j}$ pour tout $j = 0, \dots, n-1$ on se retrouve avec au plus une seule géodésique. Le facteur $e^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)n}$, qui est le terme dominant du développement WKB, provient de la croissance exponentielle (sous le flot) du volume des variétés instables : le jacobien $\det(dg_{|E^+}^n)$ croît comme $e^{(d-1)n}$, d'où la qualification d'estimée dispersive hyperbolique.

Comme le lien (4.3) entre entropie quantique et classique n'est valable que pour des temps $n \leq T_E$, la borne (4.4) (non-triviale pour $n > T_E$) ne peut être utilisée directement pour estimer $h_n^+(\psi_{\hbar}, \hat{P})$. Pour contourner le problème, on a recours à une sorte de *deus ex machina*, le **principe d'incertitude entropique** :

Théorème 4.2. [16] Soient $(\hat{\pi}_k)_{k=1}^M$ et $(\hat{\tau}_j)_{j=1}^M$ deux partitions quantiques de l'unité sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Pour tout état $\psi \in \mathcal{H}$ normalisé on définit les entropies quantiques $h(\psi, \hat{\pi})$ et $h(\psi, \hat{\tau})$. Alors, ces deux entropies satisfont à l'inégalité

$$h(\psi, \hat{\tau}) + h(\psi, \hat{\pi}) \geq -2 \log \left(\sup_{j,k} \|\hat{\tau}_j \hat{\pi}_k^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \right).$$

Ce « principe », introduit par les spécialistes des fondements de la mécanique quantique, est un avatar du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. Pour l'appliquer à notre problème, on introduit une entropie quantique « duale »

$$h_n^-(\psi_{\hbar}, \hat{P}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}} \|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^* \psi_{\hbar}\|^2 \log \|\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^* \psi_{\hbar}\|^2.$$

On prend les partitions quantiques $(\hat{\pi}_k) = (\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^*)$ et $(\hat{\tau}_j) = (\hat{P}_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}(n))$ pour $n = T_E$. En combinant le « principe d'incertitude » avec la borne (4.4), écrite sous la forme $\|\hat{\tau}_j \hat{\pi}_k^* \text{Op}_{\hbar}(\chi_{\hbar})\| \leq \hbar^{\frac{d-1-\delta}{2}}$, on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{2T_E} [h_{T_E}^+(\psi_{\hbar}, \hat{P}) + h_{T_E}^-(\psi_{\hbar}, \hat{P})] \geq \frac{(d-1-\delta)}{2},$$

qui peut être rapatriée sur $\frac{1}{n_0} h_{n_0}(\mu, P)$ grâce à (4.3), puis sur $h_{KS}(\mu)$. \square

5. Références

- [1] N. Anantharaman, *Entropy and the localization of eigenfunctions*, Ann. of Math. **168** 435–475 (2008)
- [2] N. Anantharaman, S. Nonnenmacher, *Half-delocalization of eigenfunctions of the laplacian on an Anosov manifold*, Ann. Inst. Fourier **57**, 2465–2523 (2007) ; N. Anantharaman, H. Koch et S. Nonnenmacher, *Entropy of eigenfunctions*, communication à l'International Congress of Mathematical Physics, Rio de Janeiro, 2006 ; arXiv :0704.1564
- [3] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **90**, (1967)
- [4] R. Aurich et F. Steiner, *Statistical properties of highly excited quantum eigenstates of a strongly chaotic system*, Physica **D 64**, 185–214 (1993)
- [5] A.H. Barnett, *Asymptotic rate of quantum ergodicity in chaotic Euclidean billiards*, Comm. Pure Appl. Math. **59**, 1457–1488 (2006)
- [6] J. Bourgain, E. Lindenstrauss, *Entropy of quantum limits*, Comm. Math. Phys. **233**, 153–171 (2003).

- [7] Y. Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Commun. Math. Phys. **102**, 497–502 (1985)
- [8] F. Faure, S. Nonnenmacher and S. De Bièvre, *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, Commun. Math. Phys. **239**, 449–492 (2003).
- [9] F. Faure and S. Nonnenmacher, *On the maximal scarring for quantum cat map eigenstates*, Commun. Math. Phys. **245**, 201–214 (2004)
- [10] B. Gutkin, *Dynamical "breaking" of time reversal symmetry and converse quantum ergodicity*, arXiv :0704.3289
- [11] B. Gutkin, *Entropic bounds on semiclassical measures for quantized one-dimensional maps*, arXiv :0802.3400
- [12] A. Hassell, *Stadium domains that are not QUE*, arXiv :0807.0666
- [13] J.H. Hannay and M.V. Berry, *Quantisation of linear maps on the torus—Fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica **D 1**, 267–290 (1980)
- [14] F. Ledrappier, L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann. of Math. **122**, 509–539 (1985)
- [15] E. Lindenstrauss, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. **163**, 165–219 (2006)
- [16] H. Maassen and J.B.M. Uffink, *Generalized entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1103–1106 (1988)
- [17] G. Rivière, *Entropy of semiclassical measures in dimension 2*, arXiv :0809.0230
- [18] Z. Rudnick and P. Sarnak, *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Commun. Math. Phys. **161**, 195–213 (1994)
- [19] S. Vũ Ngọc, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, 2003 (<http://perso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/documents/publis.html>)
- [20] A. Shnirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk. **29**, 181–182 (1974)
- [21] E. Vergini and M. Saraceno, *Calculation by scaling of highly excited states of billiards*, Phys. Rev. E **52**, 2204 (1995)
- [22] S. Zelditch, *Uniform distribution of the eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J. **55**, 919–941 (1987)
- [23] S. Zelditch, *Quantum ergodicity of C^* dynamical systems*, Commun. Math. Phys **177**, 507–528 (1996)

Addendum à l'article « Histoire d'un vecteur tricentenaire »

Alain Guichardet

Je tiens à signaler qu'Alain Albouy travaille actuellement sur la question. Par ailleurs, il a relevé quelques inexactitudes dans mon article.

Au n° 4.1 : il est inexact que Laplace soit l'inventeur de « la méthode exposée au 2 », Lagrange l'avait fait 20 ans plus tôt (voir le tome 5 de ses œuvres complètes).

Au n° 6.4.2 : c'est en réalité le groupe $SO(4)$ qui agit dans l'espace des phases, action décrite explicitement par G.Gyorgi dans son article *Kepler's equation, Fock variables, Bacry's generators and Dirac brackets* (Nuovo Cimento, 53A, 1948, p. 717-736) – ce qui ne signifie pas que ladite action soit simple à décrire !