

Persistence en théorie géométrique des groupes

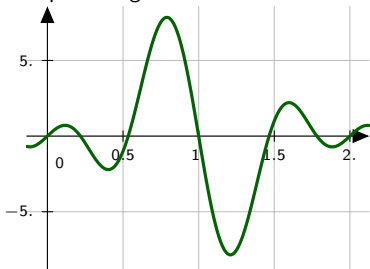
Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

30 avril 2020

Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

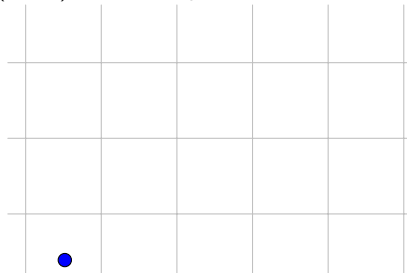
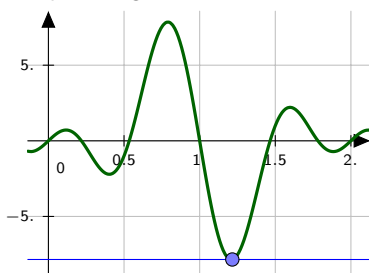
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

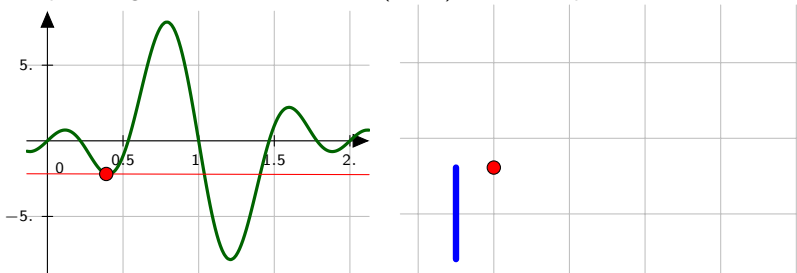
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

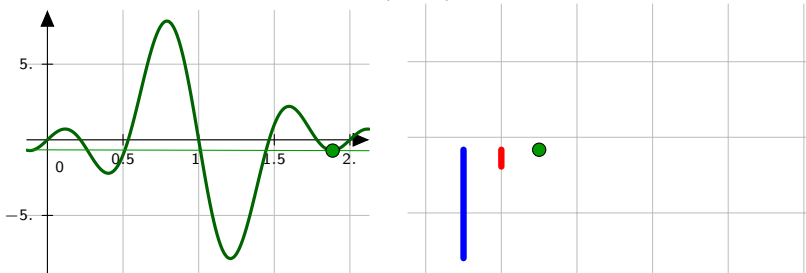
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

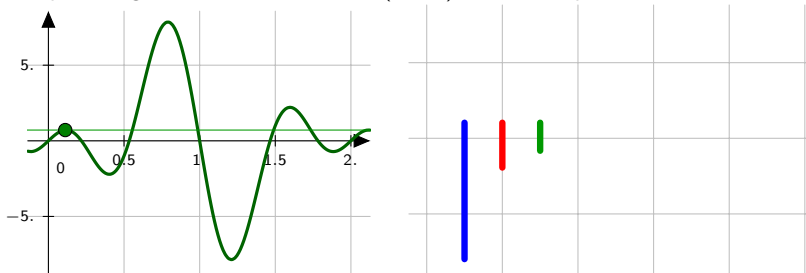
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

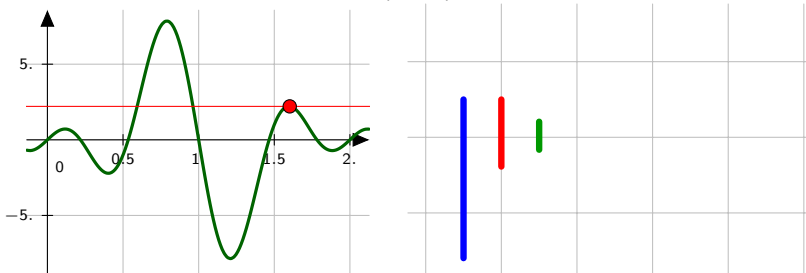
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

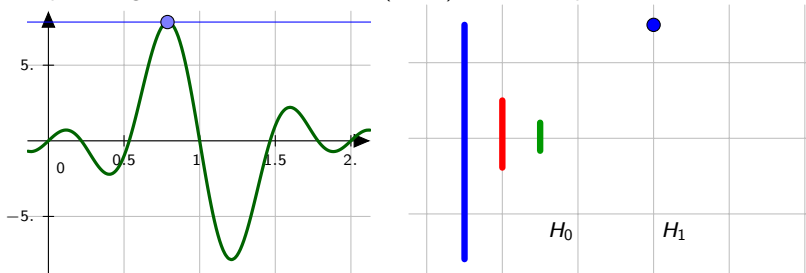
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

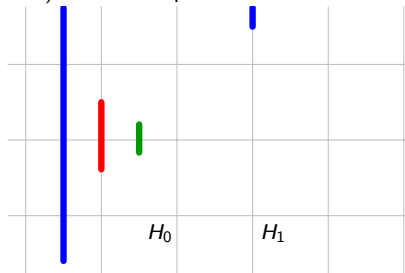
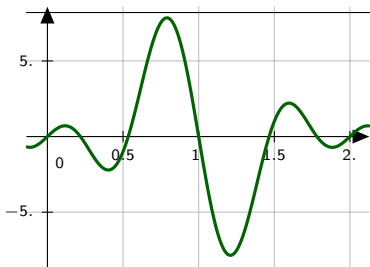
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

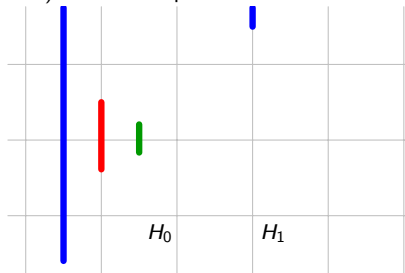
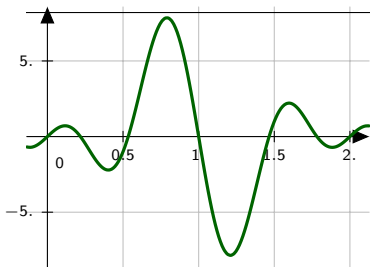
Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Problème

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse. $H_k(f < s)$ est sensible à une petite perturbation de f .
Corriger cela ? $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ est moins sensible.

Un *code-barre* est construit : une barre naît à l'instant t avec un élément de $H_k(f < t)$ qui n'appartient pas à $im(H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t))$ pour un $s < t$, et survit tant que l'image de cet élément dans $H_k(f < u)$ ne s'annule pas.



Théorème

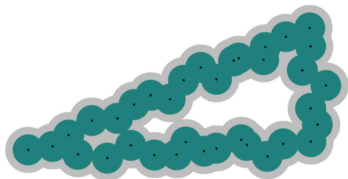
Si $\|f - g\|_\infty$ est petit, les deux codes-barres sont voisins.

Problème

On échantillonne une surface. On construit le complexe de Rips (k -faces = $k + 1$ -uplets de diamètre $< r$) ou de Vietoris (nerf du recouvrement par les r -boules) X_r . $H_k(X_r)$ est sensible aux fluctuations de l'échantillonnage. Corriger cela ? $\text{im}(H_k(X_r) \rightarrow H_k(X_s))$ est moins sensible.

Problème

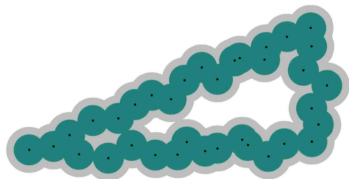
On échantillonne une surface. On construit le complexe de Rips (k -faces = $k + 1$ -uplets de diamètre $< r$) ou de Vietoris (nerf du recouvrement par les r -boules) X_r . $H_k(X_r)$ est sensible aux fluctuations de l'échantillonnage. Corriger cela ? $\text{im}(H_k(X_r) \rightarrow H_k(X_s))$ est moins sensible.



Echantillonnage d'un triangle T . $\forall r, H_*(X_r) \neq H_*(T)$.

Problème

On échantillonne une surface. On construit le complexe de Rips (k -faces = $k + 1$ -uplets de diamètre $< r$) ou de Vietoris (nerf du recouvrement par les r -boules) X_r . $H_k(X_r)$ est sensible aux fluctuations de l'échantillonnage. Corriger cela ? $im(H_k(X_r) \rightarrow H_k(X_s))$ est moins sensible.



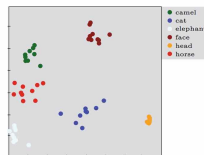
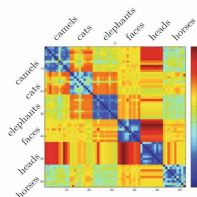
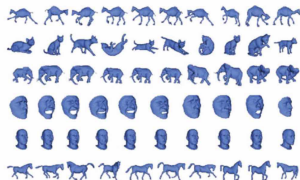
Echantillonnage d'un triangle T . $\forall r, H.(X_r) \neq H.(T)$.
 $im(H.(X_r) \rightarrow H.(X_s))$ est une meilleure approximation de $H.(T)$.
En sus, il contient une information métrique.

D'où l'intérêt des codes-barres, un par groupe d'homologie.

Crédit image : Daniel Perez

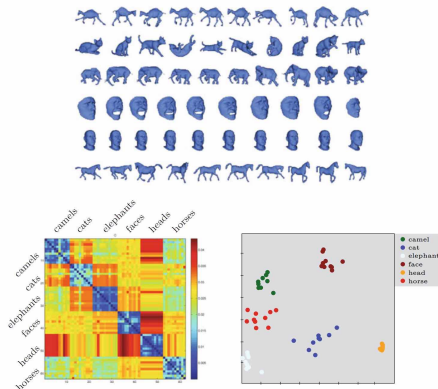
Problème

D'après Chazal-da Silva-Glisse-Oudot 2016 : 60 images à classifier.



Problème

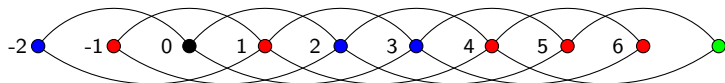
D'après Chazal-da Silva-Glisse-Oudot 2016 : 60 images à classer.



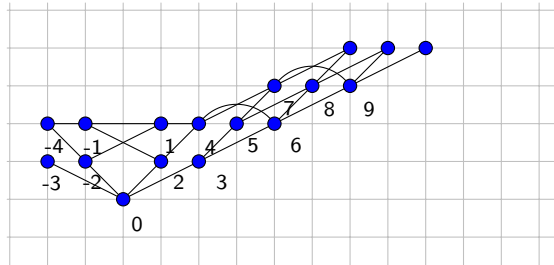
Leur solution : échantillonner, calculer Rips/Vietoris, calculer les codes-barres. A gauche : les distances entre codes-barres. A droite, une projection de cet espace métrique dans \mathbb{R}^2 .

Dans les graphes de Cayley des présentations de groupes, la distance $g \mapsto |g|$ à e atteint parfois des maxima locaux.

Exemple. $G = \mathbb{Z}$ avec le système générateur $\{2, 3\}$.



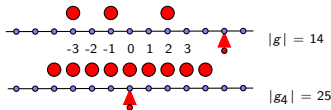
Autre vue, montrant la distance à 0 :



Définition. La *profondeur* d'un élément g de G relativement à un système générateur S est la distance de g au complémentaire de la boule $B(e, |g|)$.

Exemple. L'allumeur de réverbère (*lamplighter group*) a pour présentation $\langle a, t \mid a^2, [a^{t^n}, a], \forall n \in \mathbb{Z} \rangle$.

Pour cette présentation, la profondeur n'est pas bornée.

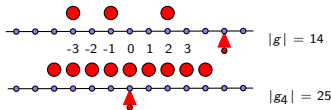


L'élément g_n satisfait $|g_n| = 6n + 1$. $\forall h \in \partial B(g_n, n)$, $|h| \leq |g_n| - n$.

Définition. La *profondeur* d'un élément g de G relativement à un système générateur S est la distance de g au complémentaire de la boule $B(e, |g|)$.

Exemple. L'allumeur de réverbère (*lamplighter group*) a pour présentation $\langle a, t \mid a^2, [a^{t^n}, a], \forall n \in \mathbb{Z} \rangle$.

Pour cette présentation, la profondeur n'est pas bornée.



L'élément g_n satisfait $|g_n| = 6n + 1$. $\forall h \in \partial B(g_n, n)$, $|h| \leq |g_n| - n$.
 Le code-barre pour $H_0(f < t)$:



Exemple (T. Riley and A. Warshall 2006). Il existe un groupe de type fini avec des profondeurs non bornées pour un système générateur, et des profondeurs bornées pour un autre.

Exemple (T. Riley and A. Warshall 2006). Il existe un groupe de type fini avec des profondeurs non bornées pour un système générateur, et des profondeurs bornées pour un autre.

Définition. La *profondeur relative* d'un élément g est $\text{prof}(g)/|g|$.

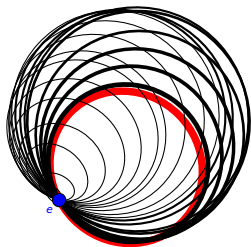
Question

Existe-t-il des groupes tels que les profondeurs relatives soient non bornées ?

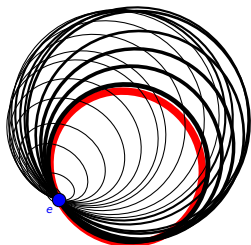
C'est un invariant de quasiisométrie.

Correction après exposé : cette question est stupide, car $\text{prof}(g)/|g| \leq 3$ (merci Y. Cornulier). Reste à trouver une variante qui est invariant de quasiisométrie .

Sur l'espace des lacets du graphe de Cayley, la longueur peut être vue comme une fonction de Morse. La profondeur des minima locaux est mesurée par l'*altitude homotopique*, i.e. la plus petite fonction ah telle que tout lacet w est homotopable à 0 via des lacets de longueur $\leq ah(|w|)$.



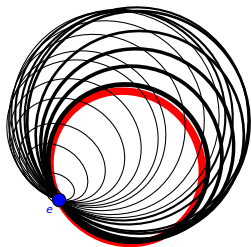
Sur l'espace des lacets du graphe de Cayley, la longueur peut être vue comme une fonction de Morse. La profondeur des minima locaux est mesurée par l'*altitude homotopique*, i.e. la plus petite fonction ah telle que tout lacet w est homotopable à 0 via des lacets de longueur $\leq ah(|w|)$.



Exemple. Pour les groupes hyperboliques, ah est linéaire.

Exemple. Pour les groupes de Novikov-Boone (problème des mots insoluble), ah est non récursive.

Sur l'espace des lacets du graphe de Cayley, la longueur peut être vue comme une fonction de Morse. La profondeur des minima locaux est mesurée par l'*altitude homotopique*, i.e. la plus petite fonction ah telle que tout lacet w est homotopable à 0 via des lacets de longueur $\leq ah(|w|)$.



Exemple. Pour les groupes hyperboliques, ah est linéaire.

Exemple. Pour les groupes de Novikov-Boone (problème des mots insoluble), ah est non récursive.

Question

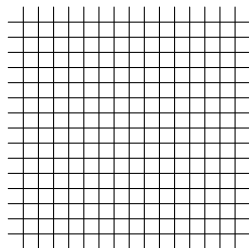
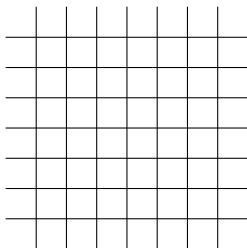
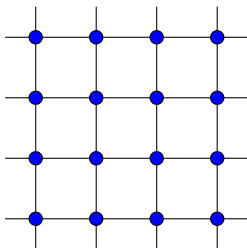
Les codes-barres des fonctions longueurs sur les espaces de lacets des graphes de Cayley, qu'ont ils à dire ?

Faire varier r dans le complexe de Rips ou celui de Vietoris, c'est multiplier la distance ambiante par $1/r$ et décider que les boules de rayon 1 sont contractiles.

Faire varier r dans le complexe de Rips ou celui de Vietoris, c'est multiplier la distance ambiante par $1/r$ et décider que les boules de rayon 1 sont contractiles.

Dans un groupe, ça revient à remplacer le système générateur $S = B(e, 1)$ par $S_r = B(e, r)$.

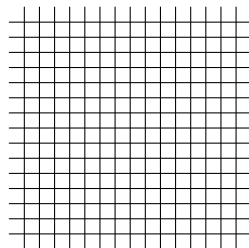
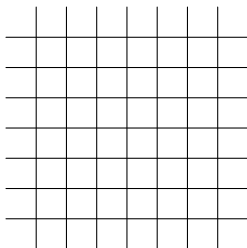
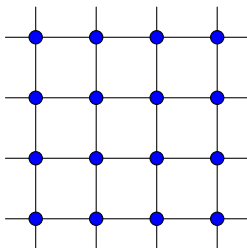
Exemple L'espace métrique $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, S_r)$ tend vers \mathbb{R}^2 muni de la métrique ℓ^1 quand $r \rightarrow \infty$.



Faire varier r dans le complexe de Rips ou celui de Vietoris, c'est multiplier la distance ambiante par $1/r$ et décider que les boules de rayon 1 sont contractiles.

Dans un groupe, ça revient à remplacer le système générateur $S = B(e, 1)$ par $S_r = B(e, r)$.

Exemple L'espace métrique $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, S_r)$ tend vers \mathbb{R}^2 muni de la métrique ℓ^1 quand $r \rightarrow \infty$.



Question

Quels invariants du groupe convergent lorsque r tend vers $+\infty$?

La profondeur ?

La profondeur ? Probablement oui.

L'altitude homotopique ah ?

La profondeur ? Probablement oui.

L'altitude homotopique ah ? Probablement oui.

Un cadre pour poser la question : les groupes nilpotents. Pour eux,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Cay}(G, S_r) = G_\infty \text{ au sens de Gromov-Hausdorff,}$$

où G_∞ est un groupe de Lie nilpotent autosimilaire (G_∞ admet un groupe à 1 paramètre d'automorphismes homothétiques pour une métrique géodésique).

La profondeur ? Probablement oui.

L'altitude homotopique ah ? Probablement oui.

Un cadre pour poser la question : les groupes nilpotents. Pour eux,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Cay}(G, S_r) = G_\infty \text{ au sens de Gromov-Hausdorff,}$$

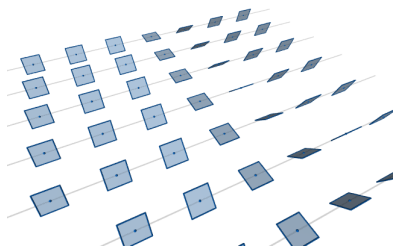
où G_∞ est un groupe de Lie nilpotent autosimilaire (G_∞ admet un groupe à 1 paramètre d'automorphismes homothétiques pour une métrique géodésique).

Exemple : groupe d'Heisenberg

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\delta_t \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & tx & t^2z \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, $G < G_\infty$.



Définition. La *fonction de Dehn* de la présentation $G = \langle S \mid R \rangle$ est la plus petite fonction $Dehn^G$ tel que tout mot w trivial dans G s'écrit comme un produit d'au plus $Dehn^{S,R}(|w|)$ conjugués d'éléments de R .

Définition. La *fonction de Dehn* de la présentation $G = \langle S \mid R \rangle$ est la plus petite fonction $Dehn^G$ tel que tout mot w trivial dans G s'écrit comme un produit d'au plus $Dehn^{S,R}(|w|)$ conjugués d'éléments de R .

C'est un invariant de quasiisométrie : $Dehn^{S,R} \sim Dehn^{S',R'}$ mais avec des constantes dépendant des présentations.

Définition. La *fonction de Dehn* de la présentation $G = \langle S \mid R \rangle$ est la plus petite fonction $Dehn^G$ tel que tout mot w trivial dans G s'écrit comme un produit d'au plus $Dehn^{S,R}(|w|)$ conjugués d'éléments de R .

C'est un invariant de quasiisométrie : $Dehn^{S,R} \sim Dehn^{S',R'}$ mais avec des constantes dépendant des présentations.

Théorème (C. Llosa-Isenrich, G. Pallier et R. Tessera 2019)

Il existe un groupe nilpotent de type fini G tel que $Dehn^G(n) \sim n^3$ et $Dehn^{G_\infty}(n) \sim n^4$.

Le candidat, un produit central de groupes filiformes, avait été suggéré par Y. Cornulier.

Définition. La *fonction de Dehn* de la présentation $G = \langle S \mid R \rangle$ est la plus petite fonction $Dehn^G$ tel que tout mot w trivial dans G s'écrit comme un produit d'au plus $Dehn^{S,R}(|w|)$ conjugués d'éléments de R .

C'est un invariant de quasiisométrie : $Dehn^{S,R} \sim Dehn^{S',R'}$ mais avec des constantes dépendant des présentations.

Théorème (C. Llosa-Isenrich, G. Pallier et R. Tessera 2019)

Il existe un groupe nilpotent de type fini G tel que $Dehn^G(n) \sim n^3$ et $Dehn^{G_\infty}(n) \sim n^4$.

Le candidat, un produit central de groupes filiformes, avait été suggéré par Y. Cornulier.

Pour comprendre ce phénomène, il faut étudier la fonction de Dehn à deux variables $(n, r) \mapsto Dehn^{S_r, R_r}(n)$, $S_r = B(e, r)$, $R_r = R \cap B(e, 10r)$.