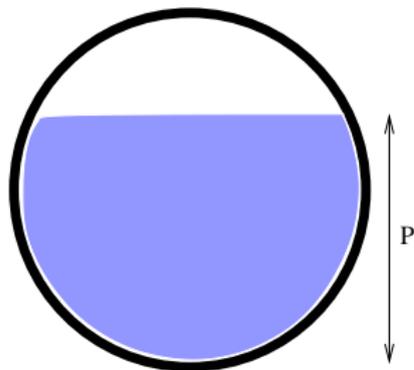
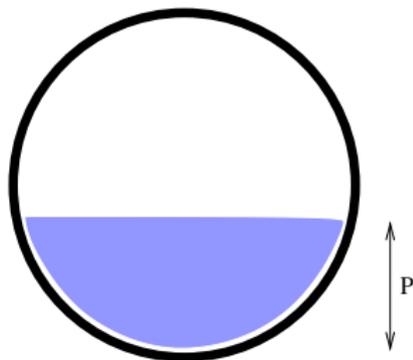


Contagion et roue de vélo

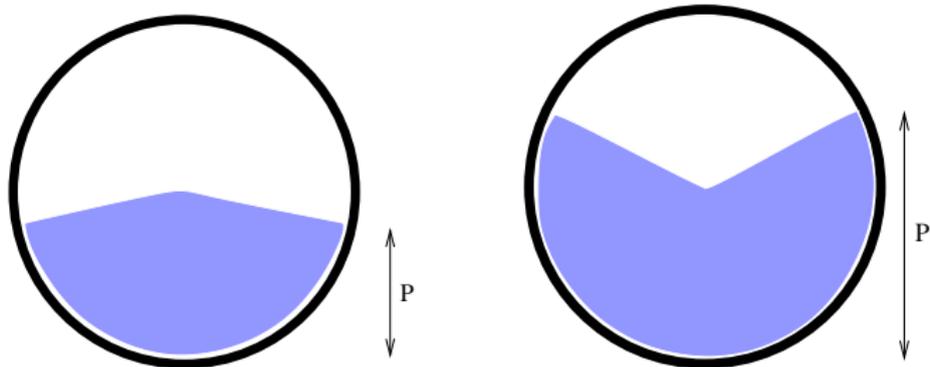
P. Pansu, Université Paris-Sud 11 et Ecole Normale Supérieure

5 février 2011

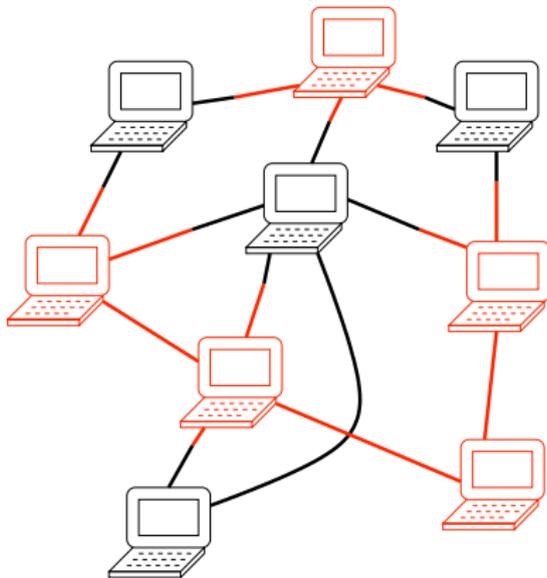
Les roues de mon vélo font 1m de diamètre.
Je gare mon vélo dans une flaqué d'eau de profondeur P . Les roues trempent dans l'eau. Soit F la fraction de l'aire de la roue qui est dans l'eau. Je m'intéresse au rapport P/F . Quelles valeurs peut il prendre ?



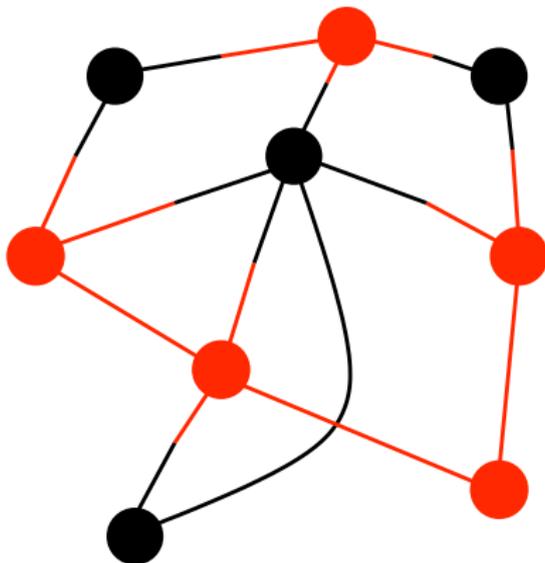
Variante : Soit F' l'aire (relative) du secteur qui monte jusqu'à la hauteur P . Je m'intéresse au rapport P/F' . Quelles valeurs peut il prendre ?



Un virus se balade sur le réseau local de l'Institut Henri Poincaré. Déjà 5 machines infectées. On coupe les connexions qui les relient aux ordinateurs encore sains. Il y en a 9.



Un virus se balade sur le réseau local de l'Institut Henri Poincaré. Déjà 5 machines infectées. On coupe les connexions qui les relient aux ordinateurs encore sains. Il y en a 9.

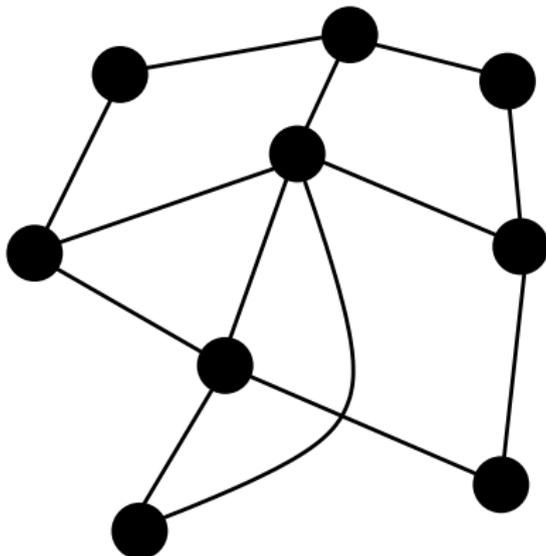


Un réseau n'est rien d'autre qu'un graphe : ici, 9 sommets, 13 arêtes. L'infection consiste à colorier une partie des sommets. La thérapie, à couper les arêtes bicolores. Ici, 9 arêtes coupées.

Il a suffi de couper 9 arêtes. Est ce que cela aurait pu être pire ? Existe t'il des infections qui nécessitent une thérapie plus radicale ?

Question

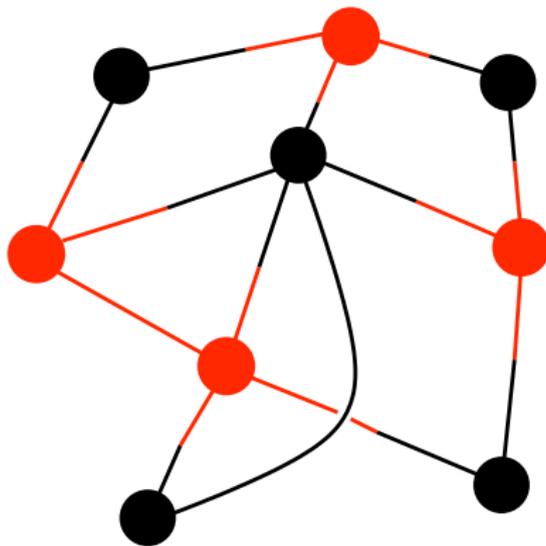
Existe-t'il un coloriage donnant plus de 9 arêtes bicolores ?



Il a suffi de couper 9 arêtes. Est ce que cela aurait pu être pire? Existe t'il des infections qui nécessitent une thérapie plus radicale?

Question

Existe-t'il un coloriage donnant plus de 9 arêtes bicolores ?

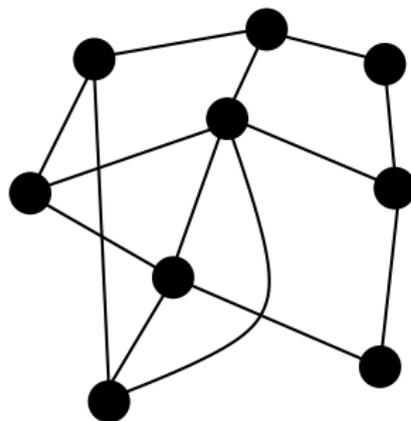
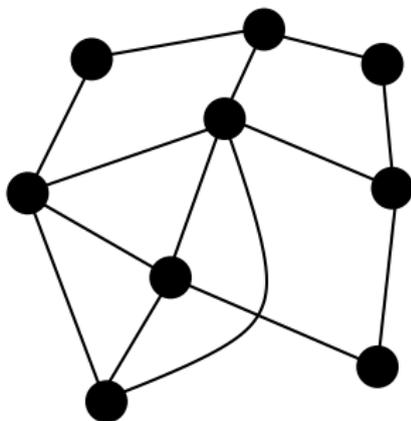


Oui, 11 arêtes. Mais jamais davantage.

Définition

Soit G un graphe. On appelle coupe maximale(G) le nombre maximal d'arêtes bicolores dans un coloriage de G .

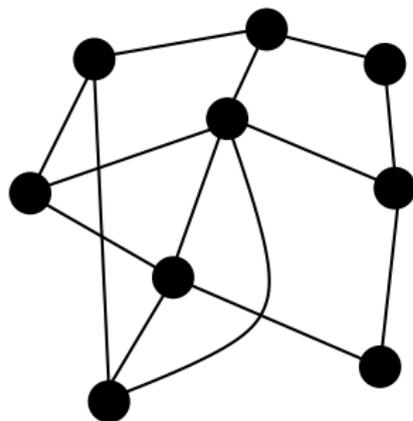
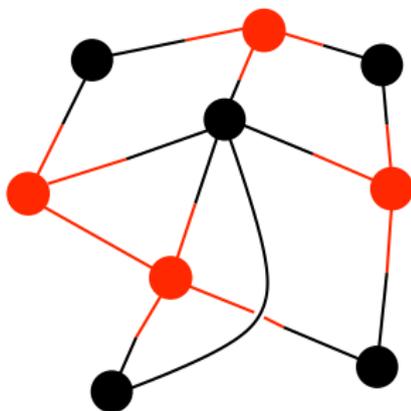
Le graphe étudié jusqu'à présent a une coupe maximale de 11.
Quels sont les coupes maximales des graphes ci-dessous ?



Définition

Soit G un graphe. On appelle coupe maximale(G) le nombre maximal d'arêtes bicolores dans un coloriage de G .

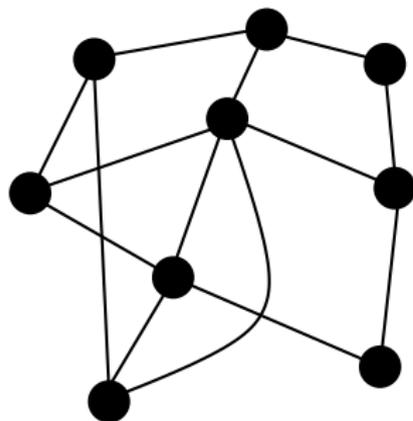
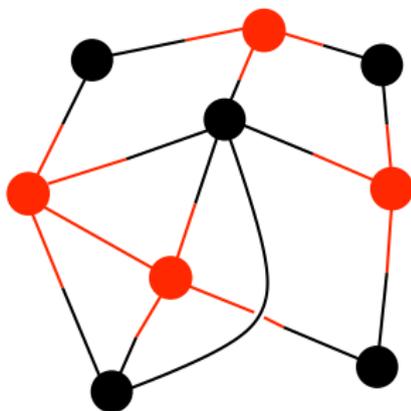
Le graphe étudié jusqu'à présent a une coupe maximale de 10.
Quels sont les coupes maximales des graphes ci-dessous ?



Définition

Soit G un graphe. On appelle coupe maximale(G) le nombre maximal d'arêtes bicolores dans un coloriage de G .

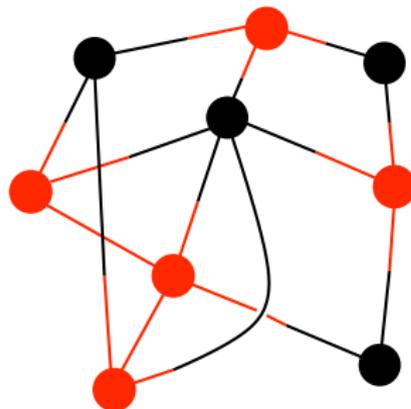
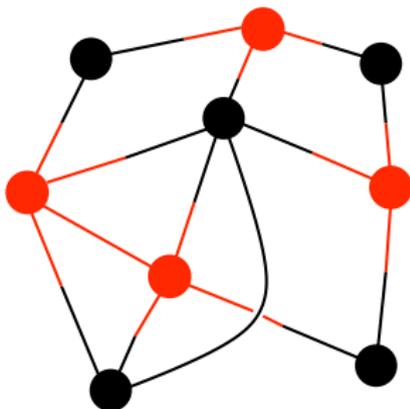
Le graphe étudié jusqu'à présent a une coupe maximale de 10.
Quels sont les coupes maximales des graphes ci-dessous ?



Définition

Soit G un graphe. On appelle coupe maximale(G) le nombre maximal d'arêtes bicolores dans un coloriage de G .

Le graphe étudié jusqu'à présent a une coupe maximale de 10.
Quels sont les coupes maximales des graphes ci-dessous ?



Problème

MAX CUT : Ecrire un programme d'ordinateur qui, étant donné un graphe G à n sommets, et un nombre entier k , décide si la coupe maximale de G est $\geq k$ ou non.

Solution

Enumérer tous les coloriage, compter les arêtes bicolores. S'arrêter dès qu'un nombre $\geq k$ a été rencontré, ou aller jusqu'au bout et conclure que la coupe maximale de G est $< k$.

Analyse : Il est possible qu'il faille 2^n opérations. Pour un graphe à $n = 90$ sommets (réseau local de mon labo), ça fait plus de 10^{27} opérations. A une fréquence d'horloge de 1 GHz, ça prend 4 milliards d'années.

2^n , c'est trop. Il faut trouver un programme qui accomplit la tâche en n^d opérations. Par exemple, si $n = 90$, $d = 2$, $n^d = 8100$ opérations et l'affaire de quelques microsecondes.

Définition

Lorsque le temps d'exécution est borné par $c n^d$, où c et d sont constants, on dit que le temps d'exécution est polynômial.

Définition

Un problème est dit P s'il existe un programme d'ordinateur qui résout le problème (répond oui ou non) en temps polynômial par rapport à la taille des données.

Autrement dit, on se demande si le problème MAX CUT est P. La réponse à cette question est **inconnue**.

Pour prouver que coupe maximale(G) $\geq k$, il suffit de dessiner un coloriage. Vérifier cette preuve, i.e. compter les arêtes bicolores, ne nécessite que $c n^2$ opérations.

Définition

Un vérificateur est un programme d'ordinateur qui traite (accepte ou rejette) en temps polynômial des données appelées preuves.

Un problème est dit NP s'il possède un vérificateur, i.e., pour toute donnée (e.g. un graphe), la solution du problème est oui si et seulement si il existe une preuve (e.g. un coloriage) acceptée par le vérificateur.

Le problème MAX CUT est NP. On ignore si tous les problèmes NP sont P. C'est la fameuse conjecture $P \neq NP$, qui remonte à Kurt Gödel (lettre à John von Neumann, 1956), mise à prix 1000000\$.

Définition

Un problème est dit NP-complet s'il est NP, et si tout problème NP s'y ramène en temps polynômial.

Si l'un d'entre eux est P, alors $P=NP$. Si l'un d'entre eux n'est pas P, alors $P \neq NP$.

Théorème (Cook, Levine (1971), Karp (1972))

MAX CUT est NP-complet.

Autrement dit, on ignore si MAX CUT est P, mais s'il l'est, cela aurait des conséquences de la plus haute importance. C'est-à-dire, cela montrerait, en dépit de l'incomplétude, que le travail intellectuel des mathématiciens, dans le cas des problèmes de décision, pourrait être entièrement remplacé par les machines... Cela me semble néanmoins du domaine du possible (Gödel).

Puisqu'on ne peut pas résoudre exactement le problème MAX CUT, on tente de le résoudre de façon approchée.

Définition

Soit $\alpha < 1$. Une résolution α -approchée de MAX CUT, c'est un programme d'ordinateur qui, étant donné un graphe G à n sommets, trouve en un temps polynômial en n , un coloriage dont le nombre d'arêtes bicolores est $\geq \alpha \times \text{coupe maximale}(G)$. Ce programme a le droit d'effectuer des tirages au hasard. On demande dans ce cas que le score annoncé soit obtenu avec probabilité $\geq \frac{1}{2}$.

Exemple

Coloriage aléatoire. On tire indépendamment au hasard la couleur de chaque sommet.

Analyse : Chaque arête a une chance sur deux d'être bicolore. L'espérance du nombre d'arêtes bicolores vaut $\frac{1}{2} \times \text{nombre d'arêtes} \geq \frac{1}{2} \times \text{coupe maximale}(G)$. Par symétrie, avec probabilité $\geq \frac{1}{2}$,

$$\text{nombre d'arêtes bicolores} \geq \frac{1}{2} \text{coupe maximale}(G).$$

Donc il s'agit d'une résolution $\frac{1}{2}$ -approchée de MAX CUT.

Théorème (Goemans-Williamson 1995)

Le problème MAX CUT possède une résolution 0.878...-approchée.

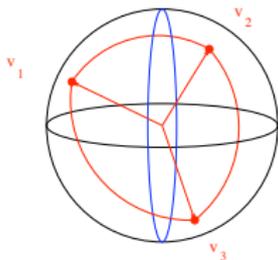
On explique la méthode dans le cas d'un graphe à 3 sommets et 3 arêtes.

On dessine le graphe sur une sphère. Les sommets deviennent des vecteurs v_1 , v_2 et v_3 . On les dispose de sorte à rendre la quantité suivante la plus grande possible

$$SDP = \frac{1}{2}(1 - v_1 \cdot v_2) + \frac{1}{2}(1 - v_2 \cdot v_3) + \frac{1}{2}(1 - v_3 \cdot v_1).$$

On admet qu'il y a un algorithme polynômial pour le faire (basé sur l'algèbre linéaire). L'idée est qu'à tout coloriage correspond une disposition particulière des vecteurs (superposés sur deux points diamétralement opposés), pour laquelle SDP est le nombre d'arêtes bicolorées. En particulier, $\max SDP \geq$ coupe maximale.

Inversement, on associe un coloriage à la disposition optimale comme suit : on coupe le graphe en deux au moyen d'un plan tiré au hasard.



La probabilité que l'arête $v_i v_j$ soit coupée (bicolore) vaut $\frac{1}{\pi} \arccos(v_i \cdot v_j)$. L'espérance du nombre d'arêtes bicolorées est

$$E = \frac{1}{\pi} \arccos(v_1 \cdot v_2) + \frac{1}{\pi} \arccos(v_2 \cdot v_3) + \frac{1}{\pi} \arccos(v_3 \cdot v_1).$$

Comme pour tout $x = \cos t$,

$$\frac{\frac{1}{\pi} \arccos(x)}{\frac{1}{2}(1-x)} = \frac{2t}{\pi(1-\cos t)} \geq 0.878\dots,$$

$E \geq 0.878\dots \max SDP \geq 0.878\dots \times \text{coupe maximale}$.

Remarque (U. Feige, G. Schechtman 2002)

Il existe des graphes pour lesquels la méthode donne une coupe arbitrairement proche de $0.878\dots \times \text{coupe maximale}$.

Théorème (S. Khot, G. Kindler, E. Mossel, R. O'Donnell 2005)

Sous une hypothèse un peu plus forte que $P \neq NP$, 0.878... est le seuil optimal d'approximabilité pour MAX CUT. Autrement dit, si $\alpha > 0.8785672057848516\dots$, il n'existe pas de résolution α -approchée de MAX CUT.

La preuve est l'aboutissement d'idées qui remontent à Gödel (vérification de preuves, vérification probabiliste de preuves) et fait intervenir de l'analyse originale (isopérimétrie dans le cube discret).

Pour en savoir davantage, utiliser les mots clés suivants : semi-definite programming, polynomial time approximation schemes, PCP theorem, Unique Games Conjecture.