

Copyright © 1990 by
Academia Scientiarum Fennica
ISSN 0066-1953

Founded and edited in 1941—1974
by P.J. MYRBERG

Editor: OLLI LEHTO
Department of Mathematics
University of Helsinki
Hallituskatu 15
SF-00100 Helsinki
Finland

YLIOPISTOPAINO
HELSINKI 1990

Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 14, 1989, 177–212

DIMENSION CONFORME ET SPHÈRE À L'INFINI DES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

Pierre Pansu

We attach a conformal structure to the ideal boundary of a manifold of negative curvature. We construct a quasiconformal invariant—generalized module—estimate it in terms of curvature pinching, and compute it in the homogeneous case. This yields an unsharp lower bound for the pinching of metrics on locally symmetric spaces, and a sharp lower bound for the Hausdorff dimension of the limit set of certain quasiconformal groups.

Dans cet article, on démontre les résultats suivants

0.1. Théorème. Soit M un quotient compact de l'espace hyperbolique complexe, i.e.,

$$M = D^m / \Gamma$$

où Γ est un sous-groupe discret d'automorphisme de la boule unité D^m de $\mathbf{C}^m$. Alors M n'admet pas de métrique riemannienne dont la courbure sectionnelle K satisfait

$$-\left(\frac{2m}{2m-1}\right)^2 \leq K \leq -1.$$

0.2. Théorème. Soit α une matrice semi-simple, considérée comme dérivation de l'algèbre de Lie abélienne $\mathbf{R}^n$. Considérons l'algèbre de Lie obtenue par extension de $\mathbf{R}^n$ par α , et notons G le groupe de Lie associé. Considérons une action de G par homéomorphismes uniformément quasiconformes de la sphère S^ν . Si G contient un élément loxodromique, son ensemble limite est une sphère topologique dont la dimension de Hausdorff est au moins égale à $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/\lambda_1$, où $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, sont les parties réelles des valeurs propres de α .

Remarquer que P. Tukia [13] a construit, pour tout $n \geq 2$, un tel groupe quasiconforme avec $\nu = n+1$, $\lambda_i = 1$, $i \leq n-1$, $\lambda_n = \log 4 / \log 3$, et dont l'ensemble limite a une dimension de Hausdorff exactement égale à $n - 1 + \log 4 / \log 3$.

Le théorème 1 n'est pas nouveau, voir [3] et [10], mais la méthode, commune à celle du théorème 2, l'est. On introduit un invariant numérique, la "dimension conforme". C'est une version invariante conforme de la dimension de Hausdorff. Il a un sens pour un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{R}^n$, mais aussi pour la sphère à l'infini d'une variable simplement connexe à courbure négative bornée. On peut

l'estimer en fonction du pincement de la courbure, et le calculer dans le cas des espaces homogènes (Théorème 5.5). Cela donne le théorème 1. Pour un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\text{dimension conforme} \leq \text{dimension de Hausdorff}.$$

D'autre part, une action quasiconforme de G sur S^n , ayant un élément loxodromique, détermine un plongement quasiconforme de la sphère à l'infini de G sur l'ensemble limite de G dans S^n , et ceux-ci augmentent la dimension conforme. On obtient ainsi le théorème 2.

0.3. Ce travail part des observations suivantes:

- (1) "La géométrie hyperbolique en dimension $n + 1$ tend, quand on s'approche de l'infini, vers la géométrie conforme de la sphère S^n " ([12, p. 465]).
- (2) Cette propriété classique s'étend aux espaces riemanniens symétriques de rang un.

Ceci joue un rôle dans le théorème de rigidité de G.D. Mostow pour ces espaces [9]. Plus précisément, leur sphère à l'infini porte une classe conforme de distances invariante par les isométries ([4, p. 98]). Ces distances ont une *dimension de Hausdorff*, c'est un entier, supérieur à la dimension ordinaire de la sphère à l'infini.

- (3) Cette dimension de Hausdorff est invariante par quasiisométries. C'est une étape dans la démonstration de la rigidité ([9, p. 163]).
- (4) Plus généralement, on comprend bien l'allure de la sphère à l'infini d'un espace homogène à courbure négative.

Par exemple, le groupe résoluble, extension du groupe abélien $\mathbf{R}^2$ par une matrice diagonale D ayant valeurs propres e^λ et e^μ , $0 < \lambda < \mu$ [11]. La sphère à l'infini s'identifie à $\mathbf{R}^2$, la matrice D engendre un groupe à un paramètre d'homothéties. Il y a une distance assez naturelle, homogène de degré λ sous D

$$d((x, y), (0, 0)) = \max\{|x|, |y|^{\lambda/\mu}\},$$

mais, pour tout $u \leq 1$, d^u est aussi une distance homogène, ni meilleure ni moins bonne que d . La dimension de Hausdorff de d^u est $u(1 + (\mu/\lambda))$. Pour lever l'ambiguïté créée par ce facteur u , il suffit de considérer une dimension *relative*, par exemple, la dimension de Hausdorff divisée par la dimension de Hausdorff d'une courbe "générique". Ceci nous conduit à la notion de *module* d'une famille de courbes, traditionnelle en géométrie conforme [15]. Dans la première partie, on montre que la sphère à l'infini d'une variété simplement connexe à courbure négative est munie d'une collection naturelle de "boules", structure suffisante pour définir des modules. Ensuite, on donne une minoration de module, qui conduit, dans la troisième partie, à la définition de la dimension conforme. Dans la quatrième partie, on montre que les plongements quasiisométriques se prolongent en

plongements "quasiconformes" de la sphère à l'infini, et par conséquent, qu'ils augmentent la dimension conforme. Au paragraphe 5, on estime des modules sur ∂M en fonction du pincement sur M . Enfin, dans la dernière partie, on tente, sans grand succès, de relier module et capacités sur ∂M avec des capacités dans M .

Je tiens à remercier S. Rickman, qui m'a initié au concept de module, M. Zinsmeister qui m'a aidé à clarifier la dernière partie, et le referee pour ses nombreuses critiques.

1. Structure quasiconforme sur la sphère à l'infini

1.1. Définition. Soit X un ensemble. Une *structure quasiconforme* sur X est la donnée d'une famille de "boules", de la notion de rapport des rayons de deux boules concentriques, et de la notion de "petite" boule. Plus précisément, on se donne:

- une famille β de parties de X ;
- une filtration décroissante

$$\beta = \beta_0 \supset \beta_1 \supset \dots \supset \beta_n \supset \dots$$

telle que si $B, B' \in \beta$, $B \subset B'$ et $B' \in \beta_n$, alors $B \in \beta_n$;

- une action de $\mathbf{R}_+$ sur β telle que $B \subset kB$ si $k \geq 1$, et $k\beta_n \subset \beta_{n'(k,n)}$, où, pour chaque k fixé, $n'(k,n)$ tend vers l'infini avec n .

Soit (X, β) un ensemble muni d'une structure quasiconforme. Un *anneau* est un couple $(a, \tilde{a})$ de parties de X tel que $a \subset \tilde{a}$. C'est un k -anneau s'il existe une boule B telle que

$$B \subset a \subset \tilde{a} \subset kB.$$

Si de plus, $kB \in \beta_n$, on dit que $(a, \tilde{a})$ est un k, n -anneau.

On dira qu'une propriété est satisfaite pour tout k -anneau assez petit s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que cette propriété soit satisfaite par tous les k, n -anneaux.

Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Deux structures quasiconformes sur X sont dites η -équivalentes si tout k -anneau assez petit de l'une est un $\eta(k)$ -anneau de l'autre.

L'objet de cet article est d'attacher des invariants à une classe d'équivalence de structures quasiconformes.

1.2. Exemple. Dans un espace métrique, on prend pour β la collection des boules, l'action de $\mathbf{R}_+$ est

$$k, B(x, r) \mapsto B(x, kr).$$

et β_n est l'ensemble des boules de rayon inférieur à $1/n$.

1.3. Exemple. Dans un espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, soit B_0 un voisinage borné de l'origine, soit kB_0 l'image de B_0 par l'homothétie de rapport k . Soit β l'ensemble des images de B_0 par homothéties et translations. Deux telles structures quasiconformes sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes.

La même construction s'applique à un groupe de Lie muni d'un groupe à un paramètre contractant d'automorphismes, i.e., les translations de $\mathbf{R}^n$ sont remplacées par les translations à gauche du groupe, les homothéties fixant l'origine par un groupe $e^{t\alpha}$ d'automorphismes, où α est une dérivation de l'algèbre de Lie dont les valeurs propres ont une partie réelle négative. Noter que si un groupe de Lie N admet une telle dérivation, alors N est nécessairement nilpotent gradué.

1.4. Exemple. Un sous-ensemble $Y \subset X$ hérite d'une structure quasiconforme induite. Ses "boules" sont les traces sur Y des "boules" de X "centrées" sur Y , i.e., telles que $kB \cap Y \neq \emptyset$ pour tout $k > 0$.

1.5. Exemple. Soit M une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure négative ou nulle. Fixons un point ξ de M ou de sa sphère à l'infini ∂M . On appelle *ombre portée* depuis le point ξ d'une partie A de M l'ensemble des extrémités des rayons géodésiques issus de ξ rencontrant A . On la note $O_\xi A$. Fixons aussi un réel positif R .

Sur $X = \partial M \setminus \xi$, considérons les ombres portées depuis le point ξ des boules de M de rayon R .

Soit B l'ombre portée de la boule $B(m, R)$. Etant donné $k > 0$, soit m' le point de la géodésique passant par ξ et m situé à distance $\log k$ de m (entre ξ et m si $k > 1$, au-delà si $k < 1$). On pose $kB = O_\xi B(m', R)$.

Enfin, notant θ la fonction distance à ξ (respectivement une horofonction relative à ξ), soit β_n l'ensemble des ombres portées des boules $B(x, R)$ telles que $\theta(x) > \log n$.

On a défini ainsi une structure quasiconforme $\text{Conf}(\xi, R)$ sur $\partial M \setminus \xi$.

1.6. Remarque. Lorsque la courbure sectionnelle est strictement négative, et le groupe d'isométries transitif, on obtient au moins une structure quasiconforme du type de celles décrites dans l'exemple 1.3.

En effet, le groupe d'isométries fixe un point ξ de ∂M (à moins que M soit symétrique; dans ce cas n'importe quel point ξ fait l'affaire). Un sous-groupe nilpotent N du groupe d'isométries est simplement transitif sur $\partial M \setminus \xi$. Un sous-groupe à un paramètre $e^{t\alpha}$ d'isométries normalise N et induit sur N des automorphismes contractants, voir [7].

Nous en venons au point crucial: la structure $\text{Conf}(\xi, R)$ ne dépend pas vraiment des paramètres ξ et R . Nous le montrons dans deux cas: lorsque la courbure est pincée entre deux constantes négatives (paragraphes 1.7 à 1.11), ou lorsque M a un groupe cocompact d'isométries (Proposition 1.12).

Les trois lemmes qui suivent expriment l'idée que, sur une géodésique, la fonction distance à une autre géodésique est d'autant plus convexe que la courbure est plus négative.

1.7. Lemme. Soit M une variété simplement connexe à courbure $K \leq -b^2 < 0$. Soient γ, γ' deux géodésiques issues d'un même point. Alors la fonction

$$t \mapsto \frac{\text{sh } bd(\gamma(t), \gamma'(t))/2}{\text{sh}(bt)}$$

est croissante pour $t > 0$.

Notons $\delta(t) = d(\gamma(t), \gamma'(t))$. Notons α et β les angles intérieurs en $\gamma(t)$ et $\gamma'(t')$ du triangle $T = \{\gamma(0), \gamma(t), \gamma'(t)\}$. La dérivée de la fonction δ est

$$\dot{\delta}(t) = \cos \alpha + \cos \beta.$$

Appliquons le théorème de comparaison de Rauch-Alexandrov-Toponogov. Il existe, en constante $-b^2$ un triangle $\bar{T}$ dont les côtés sont égaux à ceux de T mais dont les angles $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ sont plus grands. La trigonométrie hyperbolique donne

$$\text{th}(\frac{1}{2}b\delta 2) = \text{th}(bt) \cos \bar{\alpha},$$

d'où

$$\dot{\delta} \text{th}(bt) \geq 2 \text{th}(\frac{1}{2}b\delta),$$

qui est l'inégalité annoncée. $\square$

1.8. Lemme. Soit M une variété simplement connexe à courbure $K \leq -b^2 < 0$. (i) Soient γ, γ' deux géodésiques issues d'un même point. Pour $t > 0$, la fonction

$$t \mapsto \frac{\text{sh } bd(\gamma(t), \gamma')}{\text{sh}(bt)}$$

est croissante. (ii) Soient γ, γ' deux géodésiques asymptotes, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\gamma(t), \gamma'(t)) = 0.$$

Alors la fonction

$$t \mapsto e^{-bt} \text{sh } bd(\gamma(t), \gamma'(t))$$

est croissante.

Considérons la surface réglée S engendrée par les géodésiques orthogonales à γ' s'appuyant sur γ . Elle est lisse, sauf éventuellement au point commun à γ et γ' . L'équation de Gauss montre que la métrique induite a une courbure inférieure à $-b^2$. Notons S^+ l'une des composantes de $S \setminus \gamma'$. C'est une surface à bord géodésique. On peut construire son double Σ . Sa métrique, de classe C^1 seulement, admet une symétrie σ . Elle peut être approchée par des métriques lisses σ -invariantes à courbure inférieure à $-b^2$. Par conséquent, le théorème de comparaison de Rauch-Alexandrov-Toponogov y est valable, et on peut appliquer le lemme précédent aux géodésiques γ et $\sigma(\gamma)$. Ceci prouve (i). On obtient (ii) par passage à la limite. $\square$

1.9. Lemme. Soit M une variété simplement connexe à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Considérons un triangle dont deux angles sont aigus. Notons ϕ le troisième angle, s et t les côtés adjacents, H la hauteur. Si $s \leq t$, on a les inégalités

$$\frac{1}{a}H(\phi, as, at) \leq H \leq \frac{1}{b}H(\phi, bt, bt)$$

et

$$\phi(aH, as, at) \leq \phi \leq \phi(bH, bt, bt)$$

où $H(\phi, s, t)$ (respectivement $\phi(H, S, t)$) sont la hauteur (respectivement l'angle) d'un triangle de comparaison en courbure constante -1 . En particulier, on a toujours

$$(1.9) \quad \text{th}(bH) \leq \cos(\frac{1}{2}\phi).$$

On applique le théorème de comparaison de Rauch-Alexandrov-Toponogov aux deux triangles rectangles déterminés par la hauteur H . On construit deux quadrilatères de comparaison, l'un, $Q(a)$, convexe, dans le plan de courbure constante $-a^2$, l'autre, $Q(b)$, concave, dans le plan de courbure constante $-b^2$ (voir Figure 1).

Les angles de $Q(a)$ étant inférieurs à ceux du triangle initial, on trouve que $H \geq \tilde{H}$, où $\tilde{H}$ est la hauteur, en courbure $-a^2$, d'un triangle ayant deux angles aigus, et le troisième $\tilde{\phi} \leq \phi$. En augmentant $\tilde{\phi}$ jusqu'à ce qu'il vaille ϕ la hauteur augmente, d'où l'inégalité annoncée.

En général, il n'est pas clair que $Q(b)$ ait des angles aigus. C'est sûrement le cas si $s = t$, car un triangle isocèle a automatiquement ses angles aigus. Le théorème de comparaison s'applique alors et on conclut que $H \leq H(\phi, bt, bt)/b$.

On se ramène à ce cas particulier comme suit:

On se ramène d'abord à la dimension 2, en construisant une surface réglée balayée par une famille de segments dont les extrémités parcourent de façon monotone les côtés s et t , et qui contient le triangle initial. La courbure de S reste inférieure à $-b^2$ et la hauteur augmente.

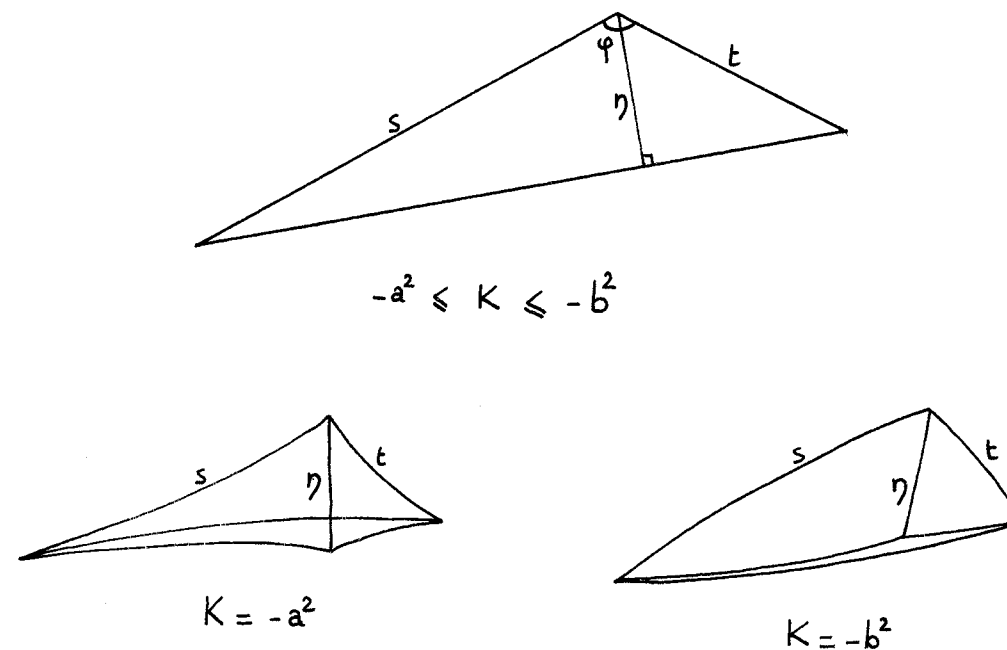


Figure 1.

En dimension 2, lorsqu'on déforme le triangle initial en éloignant le sommet dans le prolongement du côté s , la hauteur augmente, jusqu'à ce que le triangle déformé soit isocèle. On conclut que $H \leq H(\phi, bt, bt)/b$.

Enfin, en courbure constante, la hauteur est maximale pour le triangle ayant deux côtés infinis, d'où (1.9).

On peut donner des formules explicites: la hauteur H divise l'angle ϕ en deux angles aigus ϕ_s et ϕ_t et le triangle donné en deux triangles rectangles. Dans chacun, on utilise la formule de trigonométrie hyperbolique

$$\cos \phi_s = \frac{\text{th}(H)}{\text{th}(s)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \sin \phi_s \cos \phi_t + \cos \phi_s \sin \phi_t \\ &= \frac{\text{th}(H)}{\text{th}(t)} \sqrt{1 - \left(\frac{\text{th}(H)}{\text{th}(s)}\right)^2} + \frac{\text{th}(H)}{\text{th}(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{\text{th}(H)}{\text{th}(t)}\right)^2}. \end{aligned}$$

et $\phi(H, s, t)$ est la plus grande solution de cette équation. $\square$

1.10. Lemme. Soit M une variété simplement connexe à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Soient $\xi, \xi' \in M \cup \partial M$, $x \in M$ et $R \in]0, \infty[$. Notons $\phi(a, R, t) =$

$\phi(aR, at, +\infty)$ la fonction de comparaison introduite dans le lemme 1.9. Pour tout $t > R$, pour tout $\psi < \phi(a, R, t)$, il existe des constantes $R'(a, b, R, t, \psi) < +\infty$ et $\tau(a, b, R, t, \psi) < +\infty$ ne dépendant que des bornes sur la courbure, de R , de $t = d(\xi, x)$ et de l'angle ψ sous lequel ξ et ξ' sont vus depuis x telles que, si $t' = d(\xi', x) > \tau$, alors les ombres portées (voir 1.5) satisfont

$$O_{\xi}B(x, R) \subset O_{\xi'}B(x, R').$$

Lorsque $t = t' = +\infty$, R et R' et φ sont reliés par les relations suivantes

$$\text{th}(aR) = \cos(\tfrac{1}{2}\phi), \quad \text{th}(bR') = \cos(\tfrac{1}{2}(\phi - \psi)).$$

Soient γ, γ' des géodésiques issues de ξ et ξ' , de même extrémité $\chi \in \partial M$. Il s'agit de montrer que, si γ passe à distance R de x , alors γ' passe à distance R' de x . Autrement dit, il faut comparer les hauteurs H et H' des triangles $T = \{x, \xi, \chi\}$ et $T' = \{x, \xi', \chi\}$. Notons ω et ω' les angles en x .

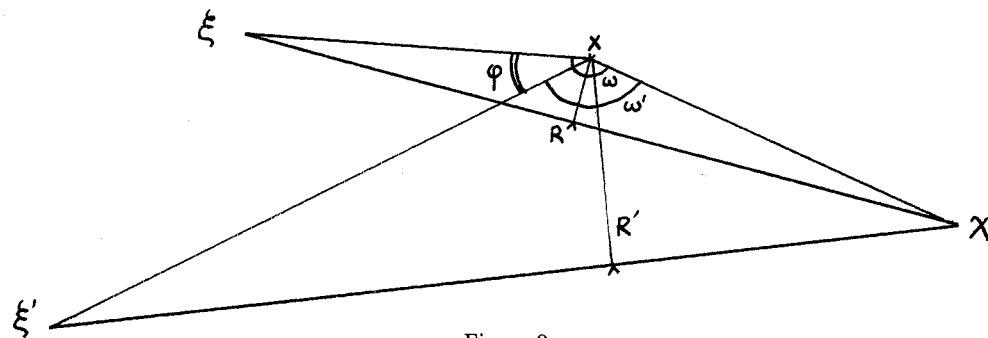


Figure 2.

Par définition de l'ombre portée, l'hypothèse $t > R$ entraîne que l'angle de T en ξ est aigu. On peut donc appliquer le lemme 1.9: l'hypothèse $H \leq R$ entraîne que

$$\omega \geq \phi(aR, at, +\infty) = \phi(a, R, t).$$

Définissons $\tau(a, b, R, t, \psi)$ par l'équation

$$\text{th}(b\tau) = \cos(\phi(a, R, t) - \psi),$$

et montrons par l'absurde que, si $t' > \tau$, l'angle en ξ' du triangle T' est aigu.

Si cet angle est obtus, en déplaçant ξ' sur la géodésique $x\xi'$, on laisse augmenter t' jusqu'à obtenir un triangle rectangle, et on déduit que

$$\text{th}(bt') \leq \cos(\omega') \leq \cos(\omega - \phi)$$

d'où $t' \leq \tau$.

On peut donc appliquer à nouveau le lemme 1.9:

$$\text{th}(bH') \leq \cos(\tfrac{1}{2}\omega') \leq \cos(\tfrac{1}{2}(\omega - \psi)),$$

soit $H' \leq R'$ où R' est défini dans l'énoncé. $\square$

1.11. Proposition. Soit M une variété simplement connexe à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Lorsque $\xi \in M \cup \partial M$ et $R > 0$ varient, les structures quasiconformes $\text{Conf}(\xi, R)$ sont deux à deux localement équivalentes.

Variation du rayon R . On traite le cas où ξ est à distance finie. Si $\xi \in \partial M$, il suffit de remplacer les sinus hyperboliques par des exponentielles. Supposons donnés des nombres positifs R et R_1 . Soit γ une géodésique issue de ξ , et $k > 0$. Un petit k -anneau centré sur γ est, par définition, le couple formé par les ombres portées des boules $B(\gamma(s), R)$ et $B(\gamma(s'), R)$, pour s grand, $s' = s + \log k$. D'après le lemme 1.8, on a

$$(*) \quad O_{\xi}B(\gamma(t), R) \subset O_{\xi}B(\gamma(s), R_1)$$

dès que

$$\frac{\text{sh}(bt)}{\text{sh}(bs)} \geq \frac{\text{sh}(bR)}{\text{sh}(bR_1)}.$$

Par conséquent, pour que

$$O_{\xi}B(\gamma(t), R_1) \subset O_{\xi}B(\gamma(s), R) \subset O_{\xi}B(\gamma(s'), R) \subset O_{\xi}B(\gamma(t'), R_1),$$

il suffit de choisir t et t' de façon que

$$\frac{\text{sh}(bt)}{\text{sh}(bs)} = \frac{\text{sh}(bR)}{\text{sh}(bR_1)}$$

et

$$\frac{\text{sh}(bt')}{\text{sh}(bs')} = \frac{\text{sh}(bR_1)}{\text{sh}(bR)}.$$

Lorsque R est grand, il vient

$$\exp b(t' - t) = \exp b(t' - s') \exp b(s' - s) \exp b(s - t) \sim k^b \left(\frac{\text{sh}(bR_1)}{\text{sh}(bR)} \right)^2.$$

On conclut que les structures quasiconformes $\text{Conf}(\xi, R)$ et $\text{Conf}(\xi, R_1)$ sont η -équivalentes, où la fonction η est linéaire,

$$\eta(k) = k \left(\frac{\text{sh}(bR_1)}{\text{sh}(bR)} \right)^{2/b}.$$

Variation du point ξ . Soient γ, γ' deux géodésiques issues de $x \in M$ et faisant un angle ψ . Soient $\xi \in \gamma([- \infty, 0])$ et $\xi' \in \gamma'([- \infty, 0])$, et $R > 0$. Soit x' le point de γ' situé à distance $\log k$ de x . Il s'agit de comparer le k -anneau (a, a') formé des ombres portées $O_{\xi}B(x, R)$ et $O_{\xi'}B(x', R)$ avec des $O_{\xi}B(y, R)$ pour y

sur γ' . Il suffit de le faire lorsque (a, a') est petit, c'est-à-dire, lorsque $d(\xi, x)$ et $d(\xi', x)$ sont grands et l'angle ψ est petit. Le lemme 1.10 fournit deux rayons R' , l'un, noté R_1 , tel que

$$O_\xi B(x, R) \subset O_{\xi'} B(x, R_1),$$

l'autre, noté R_2 , tel que

$$O_{\xi'} B(x', R_1) \subset O_\xi B(x', R_2).$$

Soit y' la projection orthogonale de x' sur la géodésique ξx , et $\varepsilon = d(x', y)$. Appliquant le lemme 1.8, il vient

$$O_\xi B(x', R_2) \subset O_\xi B(y', R_2 + \varepsilon) \subset O_\xi B(y, R)$$

où $y \in \xi x$ et

$$\exp bd(y', y) \sim \frac{\text{sh}(bR_2 + \varepsilon)}{\text{sh}(bR)}.$$

Lorsque, à k fixé, l'angle ψ tend vers 0, ε tend vers 0 et $bR_1 \sim aR$, $bR_2 = aR_1$. On conclut que, sur $\partial M \setminus \{\xi, \xi'\}$, les structures quasiconformes $\text{Conf}(\xi, R)$ et $\text{Conf}(\xi', R)$ sont η -équivalentes, avec

$$\eta(k) = k \left(\frac{\text{sh}(bR(a/b)^2)}{\text{sh}(bR)} \right)^{1/b}. \square$$

Nous montrons maintenant qu'en présence d'un gros groupe d'isométrie il n'est plus nécessaire de supposer la courbure strictement négative.

1.12. Proposition. Soit M une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, sans bandes plates totalement géodésiques. Supposons $\text{Isom}(M)$ cocompact. Alors, lorsque ξ décrit ∂M , les diverses structures quasiconformes $\text{Conf}(\xi, R)$ sur $\partial M \setminus \xi$ déc ci-dessus (exemple 1.5) sont deux à deux localement équivalentes.

Variation du rayon R . Soient $R, R' > 0$ et $\xi \in \partial M$. On montre que l'ombre portée, depuis ξ , de toute boule $B(x, R')$ est contenue dans l'ombre portée d'une boule $B(y, R)$ et contient l'ombre portée d'une boule $B(z, R)$, où ξ, y, z sont alignés et $d(y, z)$ est borné indépendamment de ξ . Pour cela, on remarque que, pour x, ξ fixés, il existe des points y et z sur la géodésique de x à ξ que satisfont cette propriété. En effet, l'hypothèse sur les bandes plates entraîne que deux géodésiques asymptotes ont une distance qui tend vers 0. Par conséquent, lorsque y tend vers ξ sur la géodésique ξx , sa distance à toutes les géodésiques qui rencontrent $B(x, R')$ décroît vers 0. La convergence est uniforme par le lemme de Dini, donc

$$O_\xi \bar{B}(x, R') \subset O_\xi B(y, R)$$

pour y assez proche de ξ . De même, lorsque z s'éloigne de ξ sur géodésique ξx , sa distance à toutes les autres géodésiques qui rencontrent $B(x, R')$ croît et tend vers l'infini, donc, pour z assez loin,

$$O_\xi B(x, R') \supset O_\xi \bar{B}(z, R).$$

Notons $\delta(x, \xi)$ la distance minimum entre y et z . Il dépend continûment de x et ξ , donc il est borné car $\text{Isom}(M)$ est cocompact sur les paires (x, ξ) , qui s'identifient au fibré unitaire tangent à M .

Variation du centre de projection. Soient $\xi, \xi' \in \partial M$. Il s'agit de montrer que l'ombre portée $O_\xi B(x, 1)$ de toute boule de rayon 1 contient (respectivement est contenue) dans l'ombre portée $O_{\xi'} B(y, 1)$ (respectivement contient $O_{\xi'} B(z, 1)$) où ξ', y, z sont alignés, et $d(y, z)$ est borné indépendamment de x , pourvu que $O_\xi x$ varie hors d'un voisinage de ξ, ξ' . Pour cela, posons, pour $\xi, \chi \in \partial M, x \in M$;

$$\delta(\xi, \chi, x) = \inf d(y, z)$$

sur les $y, z \in M$ tels que χ, y, z sont alignés et

$$O_\chi B(y, 1) \subset O_\xi B(x, 1) \subset O_\chi B(z, 1).$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, δ est une fonction continue de ξ, χ, x , donc, à x fixé, $\delta(\xi, \chi, x)$ tend vers 0 lorsque l'angle entre ξ et χ , vu de x , tend vers 0. En fait, la convergence est uniforme pour x dans un compact de M . Etant donné un point (m, u, v) de $St_2 M$, i.e., un point m et deux vecteurs tangents u et v en m orthogonaux, et un réel positif r , posons

$$\delta(m, u, v, r) = \delta(\exp_m(+\infty u), \exp_m(+\infty v), \exp_m(-ru))$$

Alors $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta(m, u, v, r) = 0$ uniformément les compacts de $St_2 M$. En effet, fixons un domaine fondamental compact Δ pour le groupe d'isométries de M . Soit $i = i(m, u, r)$ une isométrie qui ramène $x = \exp_m(-ru)$ dans Δ . Alors

$$\delta(m, u, v, r) = \delta(x', \xi, \chi)$$

où $x' = ix \in \Delta$, $\xi = i(\exp_m(+\infty u))$, $\chi = i(\exp_m(+\infty v))$. Or, lorsque $r \rightarrow +\infty$, l'angle θ entre ξ et χ vu de x' tend vers 0. En fait, le théorème donne $\tan \theta \leq e^{-r}$ si la courbure sectionnelle satisfait $K \geq -1$. On conclut que la fonction δ est bornée, car le groupe d'isométries de M est cocompact dans $St_2 M$. Ceci prouve que, pour tous ξ et χ , les structures quasiconformes $\text{Conf}(\xi, 1)$ et $\text{Conf}(\chi, 1)$ sont équivalentes, à condition de se limiter aux ombres portées $O_\xi B(x, 1)$ où x est loin de χ au sens suivant: la projection de χ sur la droite (ξ, x) tombe entre ξ et x . $\square$

Remarque. Le fait que δ tende vers 0 à l'infini signifie que, sur ∂M , il y a une géométrie 1-quasiconforme et non seulement quasiconforme.

Nous terminons ce paragraphe par deux propriétés supplémentaires des ombres portées, nécessaires en 2.7 et 5.2 respectivement.

Soit M une variété simplement connexe à courbure $K \leq -b^2 < 0$. Fixons $\xi \in M \cup \partial M$ et une horofonction θ relative à ξ (c'est la distance à ξ si $\xi \in M$). Si $B = O_\xi B(x, 1)$ est une "boule" de $\partial M \setminus \xi$, on pose $\delta(B) = e^{-\theta(x)}$. Le premier lemme signifie que la fonction δ se comporte approximativement comme le diamètre dans un espace métrique. Le second, que δ est approximativement croissante.

1.14. Lemme. Si $B = O_\xi B(x, 1)$, $B' = O_\xi B(y, 1)$ sont des ombres portées de boules, si $B \cap B' \neq \emptyset$ et si $\delta(B') \leq \delta(B)$, alors $B' \subset qB'$ où $q = (5 \operatorname{sh} b/b)^{1/b}$.

Traduisons l'énoncé:

- il existe une géodésique γ issue de ξ telle que $d(x, \gamma) \leq 1$ et $d(y, \gamma) \leq 1$;
- $\theta(x) \leq \theta(y)$.

Soit z le point de la géodésique passant par ξ et x tel que $\theta(z) = \theta(x) - b^{-1} \log(5 \operatorname{sh} b/b)$. Il s'agit de montrer que

$$O_\xi B(y, 1) \subset O_\xi B(z, 1),$$

i.e., que si γ' est une autre géodésique issue de ξ , et telle que $d(y, \gamma') \leq 1$, alors $d(z, \gamma') \leq 1$.

Soit x' (respectivement y') la projection de x (respectivement y) sur γ . Alors $d(x, x') \leq 1$, $d(y, y') \leq 1$ d'où

$$\theta(y') \geq \theta(y) - 1 \geq \theta(x) - 1.$$

Soit u le point de γ tel que $\theta(u) = \theta(x) - 1$. Par convexité, comme $\theta(u) \leq \theta(y')$,

$$d(u, \gamma') \leq d(y', \gamma') \leq d(y', y) + d(y, \gamma') \leq 2.$$

D'autre part,

$$d(x, u) \leq d(x, x') + |\theta(x') - \theta(x) + 1| \leq 3.$$

On conclut que $d(x, \gamma') \leq 5$. D'après le lemme 1.8,

$$\frac{d(z, \gamma')}{d(x, \gamma')} \leq \frac{b}{\operatorname{sh} b} \leq \frac{\operatorname{sh}(bd(z, \gamma'))}{\operatorname{sh}(bd(x, \gamma'))} \leq \frac{\operatorname{sh}(b\theta(z))}{\operatorname{sh}(b\theta(x))} \leq e^{b(\theta(z) - \theta(x))} \leq \frac{1}{5},$$

d'où $d(z, \gamma') \leq 1$. $\square$

1.15. Lemme. Si B, B' sont des boules de $\partial M \setminus \xi$, alors

$$B \subset B' \Rightarrow \delta(B) \leq (5 \operatorname{sh} b/b)^{1/b} \delta(B').$$

En effet, si on avait $\delta(B') = \varepsilon \delta(B)$ avec $\varepsilon < 1/q$, le lemme 1.14 entraînerait $B' \subset q\varepsilon B$, une contradiction. $\square$

2. Module grossier

2.1. Rappel. Soit Γ une famille de courbes rectifiables dans une partie A de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On définit (voir [15]) son module $M(\Gamma)$ comme suit:

$$M(\Gamma) = \inf \operatorname{vol}_g(A)$$

sur les métriques riemanniennes g conformes à la métrique euclidienne telles que

$$\operatorname{longueur}_g(\gamma) \geq 1$$

sur toutes les courbes γ dans Γ .

En fait, on autorise dans une classe conforme des "métriques généralisées", de la forme $g = \rho^2 ds^2$ où ρ est une fonction borélienne positive ou nulle quelconque.

Le module est un invariant conforme au sens suivant: si f est une transformation conforme, alors

$$M(f(\Gamma)) = M(\Gamma)$$

Soit f un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$. Si f est K -quasiconforme, i.e., si $n \geq 2$ et, en tout point, le Jacobien J_f et la norme de la différentielle df satisfont

$$(*) \quad |df|^n \leq K J_f,$$

alors, pour tout Γ ,

$$K^{-1} M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K^{n-1} M(\Gamma).$$

Les métriques généralisées entrant dans la définition du module servent à le rendre invariant sous les homéomorphismes quasiconformes les plus généraux, i.e., absolument continus sur les droites et admettant presque partout une différentielle qui satisfait (*).

Il est souvent crucial d'avoir une borne inférieure pour le module d'une famille de courbes. Un exemple typique est le suivant.

2.2. Exemple. Soit A un parallélépipède rectangle, soit Γ la famille des segments de droites contenus dans A , parallèles à une arête donnée, de longueur h . Si V désigne le volume de la face perpendiculaire (de façon que $\operatorname{vol}(A) = hV$), on a $M(\Gamma) = Vh^{1-n}$.

En effet, sur chaque segment γ , et pour toute fonction borélienne positive ou nulle ρ , l'inégalité de Hölder donne

$$1 \leq \operatorname{longueur}_g(\gamma) = \int_\gamma \rho ds \leq \left(\int_\gamma \rho^n ds \right)^{1/n} h^{(n-1)/n}$$

d'où, en intégrant sur la base,

$$\operatorname{vol}_g(A) \geq \int_A \rho^n dx \geq V h^{1-n}.$$

L'égalité est atteinte pour la métrique homothétique $g = 1/h^2 ds^2$. $\square$