

2.3. Généralisation. On peut sortir du cadre riemannien à condition de remplacer volume et longueur par des mesures de Hausdorff. Etant donné un espace métrique (X, d) , un réel positif p et une fonction η , on pourrait définir un p, η -module $M^{p, \eta}(\Gamma)$ comme la borne inférieure des mesures de Hausdorff p -dimensionnelles $\mathcal{H}_d^p(X)$ des métriques η -quasiconformes à d (i.e., définissant une structure quasiconforme η -équivalente à celle de d) qui donnent à chaque courbe $\gamma \in \Gamma$ une mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle $\mathcal{H}_d^1(\gamma) \geq 1$.

On a fait ici un autre choix: celui de prendre le terme de "métrique conforme" en un sens plus général.

Etant donnée une structure quasiconforme β , une métrique conforme devient la donnée d'une fonction ϕ qui, à chaque boule B de β , attache un "rayon" $\phi(B)$.

Soit (X, β) un ensemble muni d'une structure quasiconforme. Une partie $a \subset X$ est une k, n -boule si (a, a) est un k, n -anneau, i.e., s'il existe une boule B telle que $B \subset a \subset kB \in \beta_n$.

Soit ϕ une fonction positive sur l'ensemble des parties de X . Pour $\ell \geq 1$, une nouvelle fonction sur les parties de X est obtenue en posant

$$\tilde{\phi}_\ell(a) = \sup \{ \phi(\tilde{a}) \mid (a, \tilde{a}) \text{ est un } \ell\text{-anneau} \}.$$

Soit $p \geq 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$. On note $\Phi^{p, k}$ (respectivement $\tilde{\Phi}_\ell^{p, k}$) la mesure obtenue par la construction de Caratheodory (voir [1, paragraphe 2.10]) en sommant ϕ (respectivement $\tilde{\phi}_\ell$) sur les k -boules. Par exemple,

$$\Phi^{p, k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{p, k; n}$$

où, pour $Y \subset X$,

$$\Phi^{p, k; n}(Y) = \inf \sum_i \phi(a_i)^p$$

et la borne inférieure est prise sur les recouvrements dénombrables de Y par des k, n -boules a_i .

Remarquer que $\tilde{\Phi}_\ell^{p, k}$ est une fonction croissante de ℓ et décroissante de p et k .

2.4. Définition. Soit X un ensemble muni d'une structure quasiconforme β . Soit Γ une famille de parties de X , et $p > 1$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, $m \geq 1$ des réels. Le module grossier de Γ est la collection des nombres

$$M^{p, k, \ell, m}(\Gamma) = \inf \tilde{\Phi}_\ell^{p, k}$$

la borne inférieure étant prise sur les fonctions ϕ telles que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\Phi^{1, m}(\gamma) \geq 1$.

On dira qu'une famille de parties Γ a un p -module nul si Γ est une réunion dénombrable

$$\Gamma = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \Gamma_\nu$$

et, pour chaque ν , il existe un $k \geq 1$, un $m \geq 1$ et des ℓ arbitrairement grands tels que $M^{p, k, \ell, m}(\Gamma_\nu) = 0$.

2.5. Commentaires. Il est probable que, lorsque X est une variété riemannienne de dimension n et β est la famille des boules, le module grossier $M^{n, k, \ell, m}$ diffère peu du module classique défini au paragraphe 2.1. En tout cas, on a l'inégalité suivante.

$$M^{n, k, \ell, m}(\Gamma) \leq \ell^n M(\Gamma).$$

En effet, le module classique correspond à une borne inférieure prise sur les fonctions ϕ de la forme

$$\phi(B) = \text{vol}_g(B)^{1/n}.$$

En revanche, lorsque l'exposant p est différent de la dimension, le module grossier $M^{p, k, \ell, m}$ n'a rien à voir le p -module défini dans [15].

Dans la définition 2.4, le paramètre p joue le même rôle que dans la notion de mesure de Hausdorff. Au plus une valeur de p peut donner un invariant non trivial, cette valeur représente une sorte de dimension relative de la famille Γ par rapport à la structure quasiconforme β .

Les paramètres k et m reflètent l'idée qu'on minimise sur des métriques k (respectivement m)-quasiconformes à une métrique donnée (cf. 2.3). Ils jouent un rôle mineur.

Le paramètre ℓ sert à compenser une perte intervenant lors de l'estimation 2.9.

L'opération $\phi \mapsto \Phi^p$ n'est pas sous-additive. Par conséquent, le module n'est sans doute pas sous-additif, i.e., il n'est pas clair que $M^{p, k, \ell, m}(\Gamma_1)$ et $M^{p, k, \ell, m}(\Gamma_2)$ permettent de contrôler $M^{p, k, \ell, m}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

2.6. Proposition. Soient β, β' deux structures quasiconformes η -équivalentes sur X . Pour toute famille Γ de parties de X , pour tout $p \geq 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, $m \geq 1$, on a

$$M^{p, \eta(k), \ell, m}(\Gamma, \beta) \leq M^{p, k, \eta(\ell), \eta(m)}(\Gamma, \beta').$$

En particulier, β et β' définissent les mêmes familles de module nul.

Soit ϕ une fonction sur les parties de (X, β) . Lorsqu'elle sert à mesurer les parties de (X, β') , on la note ψ . Comme une k -boule pour β est une $\eta(k)$ -boule pour β' , et inversement, on a

$$\Psi^{p, \eta \circ \eta(k)} \leq \Phi^{p, \eta(k)} \leq \Psi^{p, k}.$$

En fait, tout ℓ -anneau pour β est un $\eta(\ell)$ -anneau pour β' , et inversement, d'où $\tilde{\phi}_\ell \leq \tilde{\psi}_{\eta(\ell)}$, et, par conséquent,

$$\tilde{\Psi}_\ell^{p, \eta \circ \eta(k)} \leq \tilde{\Phi}_{\eta(\ell)}^{p, \eta(k)} \leq \tilde{\Psi}_{\eta \circ \eta(\ell)}^{p, k}. \quad \square$$

On va donner, en 2.9, une estimation de module qui traduit, dans le langage des mesures de Hausdorff, l'argument donné en 2.2. On aura besoin d'une propriété de recouvrement, qui nécessite une hypothèse supplémentaire sur la structure quasiconforme.

2.7. Définition. Une bonne structure quasiconforme sur un ensemble X est une structure quasiconforme qui satisfait les conditions suivantes:

(a) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \beta$ telle que

$$x \in \bigcap_{k>0} kB;$$

(b) il existe une constante q et une fonction δ sur β telles que, pour tout $k > 0$ et pour toutes boules $B, B' \in \beta$ assez petites, $\delta(kB) = k\delta(B)$ et

$$B \cap B' \neq \emptyset, \quad \delta(B) \leq \delta(B') \Rightarrow B \subset qB'.$$

Remarquer qu'il s'agit d'une propriété de la classe d'équivalence de β . Elle est satisfaite dans tous les exemples considérés jusqu'ici:

- avec $q = 3$ pour les espaces métriques;
- avec $q = (5 \operatorname{sh} b/b)^{1/b}$ sur la sphère à l'infini d'une variété à courbure $K \leq -b^2$ (lemme 1.14); ce cas inclut les groupes nilpotents, exemple 1.3;
- cette propriété est transmise aux sous-ensembles.

2.8. Lemme ([1, p. 143]). Soit X un ensemble muni d'une bonne structure quasiconforme β , et soit $Y \subset X$. De tout recouvrement de Y par des boules de β assez petites, on peut extraire une sous-famille disjointe B_i telle que les boules concentriques qB_i recouvrent encore Y .

2.9. Proposition. Soit (X, β) un ensemble muni d'une bonne structure quasiconforme (cf. 2.7). Soit Γ une famille de parties de X munie d'une mesure positive $d\gamma$. Pour $\gamma \in \Gamma$, soit m_γ une mesure positive de masse ≤ 1 sur γ . Soit $p > 1$. On fait l'hypothèse suivante:

(c) il existe des constantes r, τ telle que, pour toute boule B de β assez petite,

$$\int_{\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cap rB \neq \emptyset\}} m_\gamma(\gamma \cap rB)^{1-p} d\gamma \leq \tau.$$

Alors, pour tout $k \geq 1$ et toute fonction ϕ sur les parties de X , on a

$$\tilde{\Phi}_{qrk}^{p, k}(X) \geq \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} \Phi^{1,1}(\gamma)^p d\gamma.$$

En particulier, le module $M^{p, k, \ell, m}(\Gamma)$ est non nul pour tout $k \geq 1$, $\ell \geq qrk$, $m \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit a_i un recouvrement de X par des k, n -boules, i.e., il existe des boules B_i telles que

$$B_i \subset a_i \subset kB_i \in \beta_n.$$

Chaque $\gamma \in \Gamma$ est recouvert par les boules rkB_i telles que a_i rencontre γ . Utilisons le lemme de recouvrement 2.8. Choisissons une sous-famille a_i , $i \in I_\gamma$, telle que les rkB_i soient deux à deux disjointes, et les $qrkB_i$ recouvrent γ . Par construction, pour $i \in I_\gamma$, $kB_i \cap \gamma \neq \emptyset$. Par définition, $\phi(qrkB_i) \leq \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)$.

Notons

$$1_i(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in I_\gamma; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme les boules $qrkB_i$ recouvrent γ , on a

$$\Phi^{1,1;n'}(qr,n)(\gamma) \leq \sum_{i \in I_\gamma} \phi(qrkB_i) = \sum_i 1_i(\gamma) \phi(qrkB_i) \leq \sum_i 1_i(\gamma) \tilde{\phi}_{qrk}(a_i).$$

Avec l'inégalité de Hölder, il vient,

$$\begin{aligned} \Phi^{1,1;n'}(qr,n)(\gamma)^p &\leq \left(\sum_i 1_i(\gamma) \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p m_\gamma(rkB_i \cap \gamma)^{1-p} \right) \left(\sum_i m_\gamma(rkB_i \cap \gamma) \right)^{p-1} \\ &\leq \sum_i 1_i(\gamma) \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p m_\gamma(rkB_i \cap \gamma)^{1-p} \end{aligned}$$

car les $rkB_i \cap \gamma$ sont deux à deux disjointes et $m_\gamma(\gamma) \leq 1$. En intégrant, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \Phi^{1,1;n'}(qr,n)(\gamma)^p d\gamma &\leq \sum_i \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p \int_{\Gamma} 1_i(\gamma) m_\gamma(rkB_i \cap \gamma)^{1-p} d\gamma \\ &\leq \tau \sum_i \tilde{\phi}_{qrk}(a_i)^p. \end{aligned}$$

Comme $\Phi^{1,1;n'}(qr,n)(\gamma)$ croît avec n , l'intégrale de gauche converge vers l'intégrale $\int \Phi^{1,1}(\gamma) \Phi^{1,1}(\gamma)^p d\gamma$, d'où l'inégalité annoncée.

On a donc montré que, pour tout $k \geq 1$,

$$M^{p, k, qrk, 1} \geq \frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} d\gamma > 0.$$

On conclut en remarquant que $M^{p, k, \ell, m}$ est une fonction

- croissante de ℓ et m ,
- décroissante de p et k . $\square$

2.10. Exemple. Les hypothèses de la proposition 2.9 sont satisfaites dans le cas suivant. Dans l'espace euclidien muni de sa structure quasiconforme standard on considère la trace, dans le cube unité, d'une famille de d -plans parallèles à une d -face. Dans les hypothèses de la proposition 2.9, on peut prendre $q = 3$ et $r > 1$ quelconque. Il vient alors, indépendamment de $k, \ell > 3k, m$,

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } p < n/d; \\ 0, & \text{si } p > n/d, \end{cases}$$

et est fini et non nul si $p = n/d$.

Plus généralement, on peut traiter le cas d'un groupe nilpotent muni d'un automorphisme e^α semi-simple, dont toutes les valeurs propres sont réelles supérieures à 1. Soit C un polyèdre convexe de l'algèbre de Lie dont les faces sont des sous-espaces α -invariants. La structure quasiconforme β est constituée des images de $\exp C$ par translations et homothéties (i.e., le groupe à un paramètre d'automorphismes engendré par α). On fixe un vecteur propre v de α dans l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$, $\alpha(v) = \lambda v$, et un borélien F , de mesure de Lebesgue finie et non nulle, dans un supplémentaire de v dans $\mathcal{N}$. On pose

$$\Gamma = \{\gamma_w \mid w \in F\}, \quad \gamma_w = \{\exp(w) \exp(sv) \mid 0 \leq s \leq 1\}.$$

La mesure $d\gamma$ sur Γ est obtenue comme suit: Si ω désigne la forme volume biinvariante, la forme $i_v \omega$ est fermée donc basique, elle définit une mesure $d\gamma$ sur l'espace des orbites, invariante par les translations à gauche, homogène de degré $\text{tr}(\alpha) - \lambda$ sous les homothéties $e^{t\alpha}$. En particulier, l'hypothèse (c) est satisfaite pour tout $r > 1$ avec $p = \text{tr}(\alpha)/\lambda$.

Comme dans le cas euclidien, on trouve un module nul, fini et non nul, infini, suivant que p est strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à l'exposant critique $\text{tr}(\alpha)/\lambda$.

Enfin, on peut admettre des valeurs propres complexes. On écrit $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2$ où α_1 a ses valeurs propres réelles positives, α_2 est une isométrie pour une norme euclidienne $|\cdot|$ sur l'algèbre de Lie qui rend les espaces propres de α_1 orthogonaux, α_1 et α_2 commutent. On prend pour C la boule unité $\{v; |v| = 1\}$ et on demande que v soit seulement un vecteur propre de α_1 . L'exposant critique est $\Re \text{tr}(\alpha)/\lambda$, où $\alpha_1(v) = \lambda v$.

2.11. Sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$. Soit Z un sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n-1}$, de dimension de Hausdorff d . Considérons le sous-ensemble $Y = \mathbf{R} \times Z$ de $\mathbf{R}^n$, muni de la structure conforme induite (boules métriques), et la famille de courbes Γ formée des droites $\mathbf{R} \times \{x\}$, $x \in Z$. Soit μ une mesure positive sur Z . On en déduit une mesure sur Γ . Supposons qu'il existe une constante C telle que, pour toute boule de rayon r ,

$$\mu(B(r)) \leq C r^d.$$

Alors la proposition 2.9 s'applique et on conclut que

$$M^{d+1,k,\ell,m}(\Gamma) > 0$$

pour tous $k \geq 1, \ell > 3k, m \geq 1$.

3. Dimension conforme

Désormais, lorsque nous parlerons de structure quasiconforme, nous supposons que X est un espace topologique, et que les boules sont ouvertes.

3.1. Définition. La dimension conforme de (X, β) , notée $q(X, \beta)$ est la borne inférieure des réels q tels que le module de la famille Γ de toutes les parties connexes, non réduites à un point, soit nul.

La dimension à l'infini d'une variété simplement connexe M à courbure négative, notée $q(\partial M)$ est la dimension conforme de la sphère à l'infini ∂M munie de l'une des structures quasiconformes $\text{Conf}(\xi, R)$.

Au paragraphe 2, on a établi des minoration de modules. Voici une majoration de module qui permet souvent de calculer des dimensions conformes.

3.2. Proposition. Lorsque (X, β) est un espace métrique non totalement discontinu, sa dimension conforme est inférieure ou égale à sa dimension de Hausdorff.

En effet, considérons la famille Γ de tous les connexes non réduits à un point. Fixons $\alpha < 1$. Posons, pour $a \subset X$,

$$\phi(a) = \text{diamètre}(a)^\alpha.$$

Alors, pour tout $m \geq 1$, $\Phi^{1,m} \geq \mathcal{H}^\alpha$ est infini sur tous les éléments de Γ . D'autre part, pour tout $\ell \geq 1$, $\phi_\ell \leq \ell \phi$. On a donc

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma) \leq \tilde{\Phi}_\ell^{p,k}(X) \leq \ell^p \Phi^{p,k}(X) \leq \ell^p \Phi^{p,1}(X) \leq (2\ell)^p \mathcal{H}^{\alpha p}(X)$$

qui est nul si αp est strictement supérieur à la dimension de Hausdorff. $\square$

3.3. Exemple. Soit X un groupe de Lie nilpotent muni d'un automorphisme contractant e^α , soit β la structure quasiconforme correspondante, telle qu'elle est décrite au paragraphe 1.3. Si $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les parties réelles des valeurs propres de la dérivation α sur l'algèbre de Lie, alors la dimension conforme est

$$q(X, \beta) = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{\lambda_1}.$$

En effet, on a décrit en 2.10 une famille de courbes sur X de module non nul pour cette valeur de l'exposant, d'où $q(X, \beta) \geq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/\lambda_1$. Inversement,



dans de nombreux cas, comme ceux décrits au paragraphe 3, la structure quasiconforme β est constituée des boules d'une métrique dont la dimension de Hausdorff est exactement $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/\lambda_1$. L'inégalité inverse résulte alors de la proposition 3.2.

En général, on raisonne comme suit. Notons d la métrique riemannienne invariante à gauche sur le groupe N obtenue à partir de la norme sur l'algèbre de Lie introduite en 2.10. Dans la définition 1.3 de la structure quasiconforme, on prend pour B_0 la boule unité $B_d(0, 1)$. On a alors, pour tout t ,

$$e^{t\alpha}(B_0) \subset B_{d'}(0, e^{\lambda_1 t}).$$

Fixons un $\varepsilon < 1$. Dans la définition du module, posons

$$\phi(e^{t\alpha}(B_0)) = e^{\varepsilon \lambda_1 t}.$$

Il vient, pour tout connexe non trivial γ ,

$$\Phi^{1,m}(\gamma) \geq \mathcal{H}^\varepsilon(\gamma) = +\infty.$$

Or la mesure $\tilde{\Phi}_\ell^{q,k}$ est finie pour $q = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/\lambda_1$, car

$$\text{vol}(e^{t\alpha}(B_0)) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}.$$

Par conséquent, pour tout $p > q$ la famille des connexes non triviaux Γ a un module nul, d'où $q \geq \mathbf{q}(X, \beta)$. $\square$

3.4. Exemple. Soit Y un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ de la forme $\mathbf{R} \times Z$, où dimension de Hausdorff égale à d . Sous les hypothèses du paragraphe 2.9, i.e., il existe une constante C et une mesure positive μ telle que $\mu(B(x, r)) \leq C r^d$, la dimension conforme de Y coïncide avec sa dimension de Hausdorff, i.e., $\mathbf{q}(Y) = d + 1$.

4. Plongements quasiconformes

Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On dira qu'une bijection $f : (X', \beta') \rightarrow (X, \beta)$ entre ensembles munis de structure quasiconformes est η -quasiconforme si $f^{-1}\beta$ est η -équivalente à β' .

Par définition, la dimension conforme est préservée par les transformations quasiconformes. Mais il est utile de savoir comment la dimension conforme se comporte sous des applications non nécessairement surjectives.

4.1. Définition. Soit $f : X' \rightarrow X$ une application entre ensembles munis de structures quasiconformes β' et β . Soit $s > 1$. On note

$$\beta^s = \{sB \mid B \in \beta', f^{-1}(B) \neq \emptyset\}.$$

Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et $s > 1$.

L'application $f : X' \rightarrow X$ est un plongement η, s -quasiconforme si
(1) pour tout $B_1, B_2 \in \beta^s$,

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \Rightarrow \ell B_1 \subset \eta(\ell) B_2;$$

(2) $f^{-1}\beta^s$ est η -équivalente à β .

On dit que f est un plongement quasiconforme si, pour tout $R > 0$, il existe des données η, s avec $s > R$ telles que f soit un plongement η, s -quasiconforme.

4.2. Remarques. Nous renvoyons aux articles [14] et [16] qui clarifient les liens entre les diverses définitions. Dans le cas des espaces métriques, notre définition consiste à supposer que $f : X \rightarrow X'$ et $f^{-1} : f(X') \rightarrow X'$ sont localement quasisymétriques au sens de [14], ou quasimöbius au sens de [16]. Dans le cas où X' est un ouvert de $\mathbf{R}^p$, $X = \mathbf{R}^n$, $p \leq n$, un plongement quasisymétrique est automatiquement quasiconforme en notre sens ([14, Theorem 3.22]).

La raison pour laquelle on introduit les sous-familles β^s est que, en général, $f^{-1}(\beta)$ n'est η -équivalente à aucune structure quasiconforme raisonnable, car certaines de ses boules sont vides.

On a défini en 2.11 la structure quasiconforme induite $\beta|_Y$ sur un sous-ensemble Y de (X, β) . L'injection $Y \subset X$ n'est pas automatiquement un plongement quasiconforme. C'est tout de même le cas lorsque Y est connexe et X a une bonne structure quasiconforme, i.e., pour tous les exemples considérés, voir 2.7.

4.3. Lemme. Soit $f : X' \rightarrow X$. Si β est une bonne structure quasiconforme (cf. 2.7) et si l'espace de départ X' est connexe, alors f est un plongement quasiconforme si et seulement si f est η -quasiconforme de X' sur $f(X')$ muni de la structure conforme induite.

(1) Soient $B_1, B_2 \in \beta^s$ telles que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Supposons B_2 assez petite pour qu'elle ne contienne pas $f(X')$. Comme $f^{-1}(s^{-1}B_1) \neq \emptyset$, on a

$$\frac{1}{s}B_1 \cap B_2 \neq \emptyset.$$

Supposons $s > q$, où q est la constante intervenant dans la définition d'une bonne structure quasiconforme. Si on avait

$$\delta(B_2) < \delta\left(\frac{1}{s}B_1\right),$$

on aurait $B_2 \subset qs^{-1}B_1 \subset B_1$, ce qui est exclu si X' est connexe. On a donc, pour tout $\ell \geq 1$,

$$\delta(\ell B_1) \leq \delta(s\ell B_2),$$

d'où, comme $\ell B_1 \cap s\ell B_2 \neq \emptyset$,

$$\ell B_1 \subset qs\ell B_2.$$

(2) Soit $B \in \beta^s$, avec $s > q$. Par hypothèse, on peut choisir un point $x \in f(X') \cap s^{-1}B$ et une boule $\tilde{B}$ centrée en x . Soit B' la boule concentrique telle que

$$\delta(B') = \delta\left(\frac{1}{s}B\right).$$

Comme $s^{-1}B \cap B' \neq \emptyset$, on a $B' \subset qs^{-1}B \subset B$. De même, comme $kB \cap skB' \neq \emptyset$, on a $kB \subset qskB'$. On a montré que β^s est η -équivalente à $\beta|_{f(X')}$ avec $\eta(k) = qsk$. $\square$

4.4. Lemme. Soit $f : X' \rightarrow X$ un plongement η, s -quasiconforme. Soit Γ une famille de parties de X' . On a, pour tout $p > 0$, $k' \geq \eta(1)$, $k \geq 1$, $\ell' \geq 1$, $\ell \geq ks\eta \circ \eta(\ell')$, $m \geq 1$,

$$M^{p,k',\ell',m}(\Gamma) \leq M^{p,k,\ell,\eta(m)}(f(\Gamma)).$$

Soit ϕ une fonction sur les parties de X . Pour $a' \subset X'$, posons

$$\psi(a') = \inf\{\phi(B) \mid B \in \beta^s, f(a') \subset B\}.$$

Comparons les fonctions $\tilde{\psi}_{\ell'}$ et $\tilde{\phi}_{\ell}$. Soit a un k -anneau de X rencontrant $f(X')$, i.e., $B \subset a \subset kB$. La boule ksB est dans β^s donc $a' = f^{-1}(ksB)$ est une k' -boule relativement à β' , $k' = \eta(1)$. Soit $\tilde{a}' \subset X'$ un sous-ensemble tel que $(a', \tilde{a}')$ soit un ℓ' -anneau de X' , i.e., pour un $B' \in \beta'$, $B' \subset a' \subset \tilde{a}' \subset \ell'B$. Comme $f^{-1}\beta^s$ est η -équivalente à β' , il existe $B'' \in \beta^s$ telle que

$$f^{-1}(B'') \subset B' \subset a' \subset \tilde{a}' \subset \ell'B \subset f^{-1}(\eta(\ell')B'').$$

Appliquons l'hypothèse (1) aux boules ksB et B'' : il vient

$$\eta(\ell')B'' \subset \eta \circ \eta(\ell')ksB,$$

donc $(a, \eta(\ell')B'')$ est un ℓ -anneau de X , $\ell = ks\eta \circ \eta(\ell')$. On conclut que

$$\psi(\tilde{a}') \leq \phi(\ell B) \leq \tilde{\phi}_{\ell}(a);$$

autrement dit, étant donné une k -boule a de X , on a construit une k' -boule a' de X' telle que $f^{-1}(a) \subset a'$ et

$$\tilde{\psi}_{\ell'}(a') \leq \tilde{\phi}_{\ell}(a).$$

Soit $\{a_i\}$ un recouvrement de $f(X')$ par des k -boules. Appliquons la construction précédente: on obtient un recouvrement de X' par des k' -boules, et on conclut que

$$\tilde{\Psi}^{p,k'}(X') \leq \tilde{\Phi}_{\ell}^{p,k}(f(X')).$$

Comme on a toujours, pour tout $\gamma \subset X'$,

$$\Psi^{1,m}(\gamma) \geq \Phi^{1,\eta(m)}(f(\gamma)),$$

on obtient l'inégalité annoncée. $\square$

4.5. Corollaire. La dimension conforme augmente dans les plongements quasiconformes, i.e., s'il existe un plongement quasiconforme de (X', β') dans (X, β) , alors

$$q(X', \beta') \leq q(X, \beta).$$

Nous décrivons maintenant deux situations où apparaissent des plongements quasiconformes, un exemple de groupe quasiconforme dû à P. Tukia (paragraphes 4.8 à 4.12) et les plongements quasiisométriques (paragraphes 4.14 à 4.17).

4.6. Groupes quasiconformes. Soit η une fonction continue croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Soit X un ensemble muni d'une structure quasiconforme β . Soit G un groupe de transformations uniformément η -quasiconformes de X . On dit que G est transitif sur la structure quasiconforme β si, étant donné deux boules $B_1, B_2 \in \beta$ et $k \geq 1$, il existe un élément g de G tel que

$$B_1 \subset g(B_2) \subset g(kB_2) \subset \eta(k)B_1.$$

Il est clair que, si deux structures quasiconformes sur X admettent le même groupe transitif de transformations, elles sont équivalentes (sous des hypothèses évidentes).

4.7. Exemple. Soit M une variété simplement connexe à courbure négative et G un groupe cocompact d'isométries de M . Alors G est transitif sur la structure quasiconforme de la sphère à l'infini ∂M . En effet, l'espace des "boules" de ∂M s'identifie au fibré unitaire tangent à M , sur lequel le groupe d'isométries G est cocompact.

Étant donné deux variétés M et M' munies de groupes cocompacts G et G' isomorphes, il existe un homéomorphisme $f : \partial M \rightarrow \partial M'$ qui conjugue les actions de G et G' (G.D. Mostow). Cet homéomorphisme est donc automatiquement quasiconforme. Plus généralement, on dit que $f : \partial M \rightarrow \partial M'$ est G -quasiconforme s'il existe un ensemble compact Δ d'homéomorphismes de $\partial M'$ tel que $f \circ G \subset G' \circ \Delta$. L'extension aux sphères à l'infini d'une quasiisométrie a cette propriété, voir 4.15. De nouveau, G -quasiconforme entraîne quasiconforme au sens ci-dessus (la réciproque est vraie dans le cas de l'espace hyperbolique). Ce point de vue est développé dans [10].

4.8. Exemple. Dans [13], P. Tukia construit, pour tout $n \geq 3$ un groupe H de transformations uniformément quasiconformes de la sphère standard S^n . L'algèbre de Lie de H est l'extension de l'algèbre abélienne $\mathbf{R}^{n-1}$ par la dérivation α dont la matrice est

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \tau \end{pmatrix},$$

où $\tau = \log 4 / \log 3$.

L'action de H sur la sphère S^n a trois orbites, deux disques bordés par une sphère S . Le sous-groupe $\mathbf{R}^{n-1}$ de H est simplement transitif sur le complémentaire d'un point ∞ dans S . Ceci définit un homéomorphisme

$$f: \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow S \setminus \{\infty\}$$

qui conjugue les actions de H sur $\mathbf{R}^{n-1}$ et $S \setminus \{\infty\}$.

D'après [7], le groupe H admet une métrique invariante à gauche à courbure sectionnelle négative. Il a donc une sphère à l'infini ∂H , qui porte une structure quasiconforme. Le groupe $\mathbf{R}^{n-1}$ est simplement transitif sur le complémentaire d'un point dans ∂H . La structure quasiconforme induite β est décrite dans l'exemple 1.3. Ses boules sont les images d'une boule unité B_0 par les éléments de H .

Le fait que l'action de H dans S^n soit uniformément quasiconforme entraîne que l'application $f: \partial H \setminus \infty \rightarrow S \setminus \infty$ est quasiconforme. En effet, soit $\beta|_S$ la structure quasiconforme induite, i.e., formée des boules euclidiennes centrées sur $S \setminus \infty$. Il suffit de vérifier que le groupe H est transitif sur $\beta|_S$, or il est transitif sur les centres, et le stabilisateur d'un point contient une homothétie de rapport 3.

On conclut grâce au lemme 1.14 que f est un plongement quasiconforme.

La sphère singulière S figurant dans l'article de P. Tukia a une dimension conforme égale à $n - 1 + \log 4 / \log 3$. On le voit, ou bien directement en utilisant la description explicite de $S = \mathbf{R}^{n-2} \times Z$ où Z est une courbe fractale dans le plan (et le paragraphe 3.4), ou bien indirectement en utilisant l'homéomorphisme quasiconforme avec la sphère à l'infini ∂H , et le paragraphe 3.3.

En particulier, S n'est pas quasiconforme à une sphère S^{n-1} au sens de la définition 4.1, donc n'est l'image de $S^{n-1} \subset S^n$ par aucune transformation quasiconforme de S^n . Par des considérations somme toute très proches de [17], on retrouve un résultat de P. Tukia: le groupe $\mathbf{R}^{n-1}$ agissant sur S^n n'est pas conjugué par une transformation quasiconforme à un sous-groupe du groupe de Möbius.

Maintenant, nous montrons que certains traits du groupe quasiconforme de P. Tukia sont communs à tous les groupes quasiconformes qui lui sont algébriquement semblables. La structure du groupe G force la structure des orbites, en particulier, il y a un point fixe, et les autres orbites ont un petit groupe d'isotropie.

On considère des groupes de Lie $G = \mathbf{R} \times N$ où N est nilpotent, et $\mathbf{R}$ agit par un automorphisme contractant $e^{t\alpha}$. Alors G s'identifie au groupe de difféomorphismes de N engendré par les translations à gauche et les $e^{t\alpha}$. On suppose donnée une action fidèle de G sur la sphère S^n par transformations uniformément quasiconformes.

On utilise la classification des éléments de G en elliptiques, paraboliques et loxodromiques, voir [2]. Par définition, les éléments elliptiques engendrent un groupe relativement compact d'homéomorphismes de S^n . Il n'y en a donc pas

dans G , qui n'a aucun tel sous-groupe. Les éléments paraboliques (respectivement loxodromiques) ont exactement un (respectivement deux) points fixes, et leur action est dissipative en dehors du ou des points fixes. En particulier, une mesure finie invariante par une telle transformation est concentrée aux points fixes. Or le groupe G étant moyennable, il laisse une mesure finie invariante sur S^n . Celle-ci est concentrée en au plus deux points. Le lemme suivant montre qu'il n'y a qu'un point dans le support, et on conclut que G fixe un point, noté désormais ∞ , dans S^n .

4.9. Lemme. *Le sous-groupe de G qui fixe deux points donnés sur S^n est contenu dans un groupe à un paramètre.*

Notons H un tel sous-groupe. Soient g et h deux éléments de H , soit Δ un domaine fondamental compact pour g dans le complémentaire des deux points. Fixons $x \in \Delta$. Pour tout entier m , il existe un m' tel que

$$h^{m'} \circ g^m(x) \in \Delta.$$

Alors $h^{m'} \circ g^m$ décrit une partie relativement compacte du groupe des homéomorphismes de S^n , et donc, une partie bornée du groupe de Lie G . Or ceci n'est possible, dans un groupe de Lie à courbure négative, que si les groupes à un paramètre engendrés par g et h coïncident. En effet, munissons G d'une métrique riemannienne invariante à courbure négative. Si $h, h' \notin N$, alors h et h' préservent chacun une géodésique, nécessairement la même. Il existe alors un $t \in \mathbf{R}$ tel que $h^t \circ h'$ ait un point fixe sur cette géodésique, cela entraîne que $h' = h^{-t}$. Si $h \notin N$ et $h' \in N$, alors h translate une géodésique d'une longueur $c > 0$, et h' préserve une horofonction θ telle que $\theta \circ h = \theta + c$, c'est incompatible avec l'hypothèse. Il reste le cas où $h, h' \in N$, qui fait l'objet de la scholie suivante. $\square$

4.10. Scholie. *Soit N un groupe de Lie nilpotent, muni d'une métrique invariante à gauche. Soit $h \in N$, et H un sous-groupe à un paramètre. Si les puissances de h se trouvent à distance bornée de H , alors $h \in H$.*

On raisonne par récurrence sur la dimension. La propriété cherchée est claire pour les groupes abéliens. Soit K un sous-groupe de N contenu dans le centre. La projection de N sur N/K (muni d'une métrique invariante à gauche idoine) diminue les distances, d'où, par récurrence, $h = ab$ avec $a \in H$ et $b \in K$. Supposons $a \notin K$. Par hypothèse, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, il existe m' tel que $h^m a^{m'}$ soit borné, or

$$h^m a^{m'} = a^{m+m'} b^{m'}$$

donc, dans N/K , $[a]^{m+m'}$ est borné, et $m+m'$ est borné. On déduit que $b^{m'}$ est borné, soit $b = 1$, et $h \in H$. Si $a \in K$, c'est que $h \in K$ et on élimine ce cas par un choix judicieux de K . $\square$

4.11. Corollaire. *Le sous-groupe N agit librement sur $S^n \setminus \{\infty\}$.*

En effet, supposons que N contienne un élément loxodromique g . Soit $h \neq 1$ un élément non nul du centre. Comme $hg = gh$, h a les mêmes points fixes que g , donc g et h se trouvent dans le même groupe à un paramètre, donc g est dans le centre. En appliquant de nouveau le lemme 4.9, on conclut que $\dim N = 1$. Enfin, si $h \in G \setminus H$, on a $h^{-1}gh = g^{\lambda+1}$, donc h a les mêmes points fixes que g , et on conclut que $\dim G = 1$, c'est absurde. $\square$

4.12. Théorème. Soit G un groupe de Lie connexe, extension d'un groupe nilpotent N par une dérivation semi-simple à valeurs propres de partie réelle positive. Supposons que G agisse par transformations uniformément quasiconformes sur la sphère standard S^ν . Alors G a un point fixe commun ∞ . S'il a un autre point fixe x , l'orbite Gx a une dimension de Hausdorff supérieure ou égale à la dimension à l'infini de G .

Vérifions que l'application $f : N \rightarrow S^\nu$, $h \mapsto hx$ est un plongement quasiconforme, en fait, une transformation quasiconforme sur son image. D'après le corollaire 4.11, f est injective. Notons β la structure quasiconforme induite sur $f(N)$ par la structure standard de S^ν . Fixons une boule B_0 centrée en x . Notons $B'_0 = f^{-1}B_0$ et β' la structure quasiconforme construite à partir de B'_0 par application des éléments du groupe G . Alors β et β' sont équivalentes. En effet, l'application f conjugue les actions de G sur N et sur $f(N)$, et le groupe G est transitif par définition sur les boules de β . Il est aussi transitif sur les centres des boules de β' . Enfin, le stabilisateur de x est un groupe à un paramètre d'éléments loxodromiques, dont on connaît la dynamique [2], donc G est transitif sur β .

Par définition, la dimension à l'infini de G est égale à la dimension conforme de β' , et donc, à la dimension conforme de β , qui minore sa dimension de Hausdorff (Proposition 3.2). $\square$

4.13. Remarque Est-il possible que G agisse librement sur $S^\nu \setminus \{\infty\}$? Si oui, pour tout y , l'application $f : G \rightarrow \mathbf{R}^\nu = S^\nu \setminus \{\infty\}$, $f(g) = gy$ est, en un sens très faible, quasisymétrique: si $g, h, k \in G$ et $d(g, h) = d(g, k) = r$, alors $d(f(g), f(h)) \leq Hd(f(g), f(k))$, où H dépend de r seulement. On sait (voir [10]) que, si $\dim G = \nu$, f ne peut pas être quasiconforme au sens ordinaire.

4.14. Définition. Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques est un *plongement quasiisométrique* si elle satisfait des inégalités

$$-C + \frac{1}{L}d(x, y) \leq d(fx, fy) \leq Ld(x, y) + C.$$

C'est une *quasiisométrie* si, de plus, son image est C -dense dans Y .

4.15. Proposition. Un plongement quasiisométrique (respectivement une quasiisométrie) entre des variétés simplement connexes à courbure $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$, se prolonge aux sphères à l'infini en un plongement quasiconforme (respectivement une transformation quasiconforme).

En effet, l'image de toute géodésique de X est contenue dans un voisinage tubulaire de largeur bornée $\tau = \tau(b, C, L)$ d'une géodésique de Y (M. Morse, voir par exemple [11]). Une boule B de β' est, par définition, une ombre portée $O_{\xi'}B(y, R)$. Limitons nous aux boules telles que $O_{\xi'}y \in f(\partial X)$. On le peut, grâce au lemme 1.14. D'après la proposition 1.11, on peut aussi supposer que $\xi' \in f(\partial X)$. Posons $\xi' = f(\xi)$. Alors il existe un $x \in X$ tel que $d(f(x), y) \leq \tau$. On vérifie alors que

$$f^{-1}(O_{\xi'}B(x, R)) \subset O_{\xi}B(x, R_1),$$

où R_1 ne dépend que de R, b, L, C . Si z désigne le point de la géodésique $\xi'y$ situé à distance k de y , il est proche de $f(t)$ où t est situé sur la géodésique ξx , à distance au plus $Lk + C$ de x , d'où

$$O_{\xi}B(t, R_2) \subset f^{-1}(O_{\xi'}B(z, R))$$

pour un $R_2(R, b, L, C)$ positif si R est assez grand. Avec la proposition 1.11, cela prouve que f est un plongement quasiconforme. $\square$

4.16. Corollaire. Soit N une variété compacte admettant une métrique à courbure négative. Alors la dimension à l'infini $q(\partial \tilde{N})$ de son revêtement universel est un invariant homotopique de N .

4.17. Variétés à bord convexe. Supposons que X et Y soient les revêtements universels de variétés compactes N et P . Un homomorphisme de groupes $h : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(P)$ même injectif, ne donne pas toujours naissance à un plongement quasiisométrique.

Voici une condition suffisante. Soit M une variété localement symétrique de rang un, compacte, à bord convexe, i.e., deux points intérieurs sont reliés par une géodésique ne rencontrant pas le bord. Alors le revêtement universel $\tilde{M}$ s'identifie à une partie convexe d'un espace symétrique X , d'où un homomorphisme $h : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(X)$. Cet homomorphisme est quasiisométrique. En effet, si on fixe une origine O dans M , les fonctions

$$\gamma \mapsto d_M(O, \gamma(O))$$

sur $\pi_1(M)$ et

$$i \mapsto d_X(O, i(O))$$

sur $\text{Isom}(X)$ sont équivalentes à des distances algébrique sur $\pi_1(M)$ et riemannienne sur $\text{Isom}(X)$. Or la convexité de M entraîne que $d_M = d_X$.

4.18. Corollaire. Soit N un quotient compact d'un espace symétrique de rang un $\mathbf{K}H^m$, (voir [9]). Supposons que N ait même type d'homotopie qu'une variété compacte P à bord convexe, à courbure constante. Alors nécessairement

$$\dim P - \dim N \geq \dim \mathbf{K} - 1,$$

soit 1 si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, 3 si $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, 7 si $\mathbf{K} = \mathbf{Ca}$

Je ne connais pas d'exemple de cette situation. En revanche, M. Gromov et W. Thurston [5] ont construit récemment des variétés compactes à courbure négative (arbitrairement pincée) qui ont même type d'homotopie qu'une variété compacte, à bord convexe, à courbure constante. Ils montrent que ces variétés n'admettent pas de métrique à courbure constante. Il n'est pas clair que ces variétés aient une dimension à l'infini supérieure à $n - 1$.

5. Estimations de module grossier en fonction de la courbure

Dans les trois énoncés qui suivent, M désigne une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle $K \leq -b^2 < 0$. On munit la sphère à l'infini ∂M d'une structure quasiconforme $\text{Conf}(\xi, 1)$. On désigne par θ la fonction distance au point ξ , si $\xi \in M$, ou bien une horofonction relative à ξ si $\xi \in \partial M$. On attache à l'ombre portée B d'une boule $B(x, 1)$ le "rayon" $\phi(B) = e^{-\theta(x)}$ (c'est la fonction déjà considérée en 1.14). A une partie quelconque a de $\partial M \setminus \xi$, on attache le "diamètre"

$$\phi(a) = \inf_{B \subset a} \phi(B).$$

5.1. Lemme. Pour tout compact σ dans $\partial M \setminus \xi$, qui se projette en σ_s sur la sphère (respectivement l'horosphère) $\{\theta = s\}$, on a, pour tout $q > 0$, $m \geq 1$,

$$\mathcal{H}^q(\sigma_s) \leq (2sh b/b)^q e^{qb s} \Phi^{qb, m}(\sigma),$$

où $\mathcal{H}^q$ désigne la mesure de Hausdorff q -dimensionnelle dans M .

Le lemme 1.8 montre que, si $x \in M$, $\theta(x) = t \geq s$ et si y désigne la projection de x sur la sphère (respectivement horosphère) $\{\theta = s\}$,

$$O_\xi B(x, 1) \subset O_\xi B(y, r)$$

où

$$\frac{br}{sh b} \leq \frac{sh(br)}{sh(b)} \leq \frac{sh(bs)}{sh(bt)} \leq e^{-b(t-s)}.$$

Si les boules $B_i = O_\xi B(x_i, 1)$ recouvrent σ , leur projection a un diamètre inférieur à ε et

$$\Phi^{qb}(\sigma) \leq \sum_i \phi(B_i)^{qb} + \varepsilon,$$

alors les $B(y_i, s_i)$ recouvrent σ_s d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^q(\sigma_s) &\leq \sum_i (2r_i)^q \leq \left(\frac{2sh b}{b}\right)^q \sum_i e^{-qb(\theta(x_i)-s)} \\ &\leq \left(\frac{2sh b}{b}\right)^q e^{qb s} \sum_i \phi(B_i)^{qb} \leq \left(\frac{2sh b}{b}\right)^q e^{qb s} (\Phi^{qb, 1}(B_i) + \varepsilon). \end{aligned}$$

On conclut car, par définition de ϕ , $\Phi^{qb, m} = \Phi^{qb, 1}$. $\square$

5.2. Lemme. Si h désigne l'entropie volumique de M , i.e.,

$$h = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \text{vol } B(m, R),$$

alors, pour tout $p > h$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, la mesure $\tilde{\Phi}_\ell^{p, k}$ sur ∂M est nulle.

D'après le lemme 1.15, on a, pour tout $a \subset \partial M \setminus \xi$,

$$\tilde{\phi}_\ell(a) \leq \left(\frac{5sh b}{b}\right)^{1/b} \ell \phi(a)$$

donc il suffit de montrer que $\Phi^{p, 1}(\sigma) = 0$ pour tout compact σ de $\partial M \setminus \xi$. On traite d'abord le cas où $\xi = m$ est à distance finie. Notons S le cône sur σ d'origine ξ . Soit $\{x_i\}$ un système maximal de points de S tel que les boules $B(x_i, \frac{1}{2})$ soient deux à deux disjointes. Alors les $B(x_i, 1)$ recouvrent S , et leurs ombres portées depuis ξ recouvrent σ . En fait, pour tout $s > 0$, il suffit, pour recouvrir σ , de prendre les ombres portées des boules centrées sur les x_i tels que $\theta(x_i) > s$. Il vient, pour $n = e^s$,

$$\Phi^{p, 1; n}(\sigma) \leq \sum_{\theta(x_i) > s} e^{-pd(x_i, m)}.$$

Pour $s < 0$, notons

$$I(r) = \{i \mid r \leq d(x_i, m) \leq r+1\}.$$

Il vient

$$\Phi^{p, 1; n}(\sigma) \leq \sum_{r=s}^{\infty} \sum_{i \in I(r)} e^{-pd(x_i, m)} \leq \sum_{r=s}^{\infty} e^{-pr} \text{card } I(r).$$

Or, si v est un minorant pour le volume des boules de M de rayon $\frac{1}{2}$, on a

$$v \text{card}(I(r)) \leq \text{vol } B(m, r + \frac{3}{2}) - \text{vol } B(m, r - \frac{1}{2}),$$

d'où

$$\Phi^{p, 1; n}(\sigma) \leq \frac{2}{pv} \sum_{r=s}^{\infty} e^{-pr} \text{vol } B(m, r+1),$$

qui tend vers 0 lorsque s tend vers l'infini, dès que $p > h$.

On conclut que $\Phi^{p, 1} = 0$.

Lorsque ξ est à l'infini, on fixe une origine $m \in M$ telle que $\theta(m) = 0$. On remarque que, pour $x \in S$, on a

$$|\theta(x)| \geq d(x, m) - D$$