

où D est le diamètre de $S \cap \{\theta = 0\}$. En effet, si y est la projection de x sur l'horosphère $\{\theta = 0\}$, on a

$$d(x, m) \leq d(x, y) + d(y, m) \leq |\theta(x)| + D.$$

Il vient, comme σ est recouvert par les ombres portées des boules centrées sur les x_i tels que $\theta(x_i) > s$ et pour $n = e^s$,

$$\Phi^{p,1;n}(\sigma) \leq \sum_{\theta(x_i) > s} e^{-p\theta(x_i)} \leq e^{pD} \sum_{\theta(x_i) > s} e^{-pd(x_i, m)},$$

et on termine comme ci-dessus. $\square$

5.3. Question. Pour $p = h$, les mesures $\Phi^{p,k}$ sont-elles reliées aux mesures introduites par G.A. Margulis dans [8]?

5.4. Corollaire. Sous les hypothèses ci-dessus, pour toute famille de connexes non triviaux Γ dans ∂M , les modules grossiers

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma)$$

sont tous nuls si $q > h/b$.

En effet, un module non nul entraînerait, comme $\tilde{\Phi}_\ell^{p,k}(\sigma) < \infty$ pour $p > h$, qu'il existe une courbe continue non triviale γ telle que $\tilde{\Phi}^{p/q,m}(\gamma) < \infty$. D'après le lemme 5.1, la projection γ_s de γ sur l'horosphère $\{\theta = s\}$ aurait une dimension de Hausdorff $\leq p/qb$. Or M est un espace métrique, donc

$$\dim_{\text{Hausdorff}}(\gamma_0) \geq \dim_{\text{topologique}}(\gamma)$$

d'où $p \geq qb$. $\square$

L'exemple 3.3 et le corollaire 5.4 combinés donnent l'énoncé suivant.

5.5. Théorème. Si M est simplement connexe, à courbure sectionnelle $K \leq -1$, alors l'entropie volumique $h(M)$ et la dimension à l'infini $q(\partial M)$ satisfont

$$h(M) \geq q(\partial M).$$

Lorsque M est homogène sous le groupe $N \times \mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ agit sur l'algèbre de Lie de N par une dérivation dont les valeurs propres ont des parties réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positives, on a

$$q(\partial M) = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{\lambda_1}.$$

La dimension à l'infini permet de montrer que certains espaces homogènes à courbure négative ne sont pas quasiisométriques. En fait, la classification de

ces espaces à quasiisométrie près a été complétée récemment par U. Hamenstädt, voir [6].

Les espaces symétriques de rang un, i.e., les espaces hyperboliques KH^n , $n \geq 2$ sur les corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$ admettent des quotients compacts. Sur un tel quotient compact, toute métrique à courbure $-a^2 \leq K \leq -1$ doit avoir une entropie supérieure à $nk + k - 2$, où $k = \dim \mathbf{K} = 1, 2, 4$ ou 8 . Or l'entropie est toujours majorée par $(nk - 1)a$. Il vient

$$a \geq \frac{nk + k - 2}{nk - 1}.$$

Autrement dit, si KH^n n'a pas une courbure constante, ses quotients compacts ne portent pas de métrique à courbure sectionnelle pincée $-a^2 \leq K \leq -1$ pour $a < (nk + k - 2)/(nk - 1)$. Ceci achève la preuve du théorème 1.

6. Capacités

L'idée de longueur extrémale se concrétise classiquement en deux familles d'invariants conformes: le module d'une famille de courbes, et la capacité d'un condensateur, reflétant la dualité entre courbes et 1-formes différentielles. Cette dualité se prolonge en géométrie conforme grossière.

6.1. Définition. Soit (X, β) un ensemble muni d'une structure quasiconforme. Soit u une application continue de X dans un espace métrique Y . Pour $a \subset X$, posons

$$e(a) = \text{diamètre } u(a).$$

Par le procédé décrit en 2.3, il lui correspond une famille de mesures $\tilde{E}_\ell^{p,k}$, $p \geq 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$. On définit l'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ par

$$E_{p,k,\ell}(u) = \tilde{E}_\ell^{p,k}(X).$$

Des inégalités données en 2.6, il résulte immédiatement que

6.2. Lemme. Si $f : (X', \beta') \rightarrow (X, \beta)$ est η -quasiconforme et $u : X \rightarrow Y$ est continue, alors

$$E_{p,\eta \circ \eta(k),\ell}(u) \leq E'_{p,\eta(k),\eta(\ell)}(u \circ f) \leq E_{p,k,\eta \circ \eta(\ell)}(u).$$

6.3. Définition. Un condensateur dans un espace topologique est un triplet (C, A_0, A_1) où A_0 et A_1 sont contenus dans l'adhérence de C , et C est muni d'une structure quasiconforme β . Etant donné des réels $p > 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 1$, sa capacité $\text{cap}_{p,k,\ell}(C, A_0, A_1)$ est la borne inférieure des énergies $E_{p,k,\ell}(u)$ sur les fonctions continues $u : \bar{C} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$u(A_0) = 0, \quad u(A_1) = 1.$$

6.4. Lemme. Soit (C, A_0, A_1) un condensateur muni d'une structure quasi-conforme β , et p un réel positif. On a

$$M^{p,k,\ell,m}(\Gamma) \leq \text{cap}_{p,k,\ell}(C, A_0, A_1),$$

où Γ est la famille des courbes continues reliant A_0 à A_1 dans C .

En effet, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $u(\gamma)$ contient l'intervalle $[0, 1]$, donc

$$e^{1,m}(\gamma) \geq \mathcal{H}^1 u(\gamma) \geq 1.$$

6.5. Exemples. Pour toute fonction continue non constante sur $\mathbf{R}^n$, l'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ est infinie pour $p < n$.

En effet, il existe des familles de segments parallèles (exemple 2.10) Γ telles que $\text{osc}(u|_\gamma) > \varepsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et on utilise le lemme 6.4.

La valeur de $p \geq n$ pour laquelle l'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ est finie constitue une mesure de la régularité de u . Par exemple, pour une orbite brownienne ($n = 1$), on a presque toujours $p = 2$. Cependant, l'énergie ne suffit pas à définir des espaces fonctionnels. Il est improbable que la somme $u + v$ soit d'énergie finie dès que u et v le sont.

On est cependant tenté de définir une autre "dimension conforme" $r(X, \beta)$ comme la borne inférieure des exposants p tels qu'il existe une fonction continue non constante u sur X , un $k \geq 1$ et des ℓ arbitrairement grands tels que la mesure $E_{p,k,\ell}(u)$ soit finie sur les compacts. On va voir que ce choix de définition peut ou non coïncider avec celui fait en 3.1.

6.6. Lemme. Soit N un groupe nilpotent muni d'une dérivation semi-simple α dont les valeurs propres ont des parties réelles $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Soit u une fonction continue sur un ouvert de N , telle que l'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ soit finie, pour un

$$p < \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{\lambda_i}.$$

Alors u est invariante par le sous-groupe de translations à gauche de N engendré par

$$V^i = \bigoplus_{\text{Re}(\mu) = \lambda_i} \ker(\alpha - \mu).$$

Soit $v \in V^i$ et supposons que $u(x) < u(x \exp(v))$. Soit W un supplémentaire de v dans N . Considérons les condensateurs de la forme

$$\begin{aligned} C &= \{x \exp(w) \exp(rv) \mid w \in F, 0 < s < 1\}, \\ \partial_0 C &= \{x \exp(w) \mid w \in F\}, \\ \partial_1 C &= \{x \exp(w) \exp(v) \mid w \in F\}, \end{aligned}$$

où $F \subset W$. Comme u est continue, pour F assez petit,

$$\varepsilon = \min_{\partial_1 C} u - \max_{\partial_0 C} u > 0,$$

d'où

$$E_{p,k,\ell}(u) \geq \varepsilon^p \text{cap}_{p,k,\ell}(C).$$

Or d'après 6.4, $\text{cap}_p(C)$ est minoré par le module de la famille des orbites $s \mapsto x \exp(sv)$, qui, d'après 2.10, est infini pour $p < (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/\lambda_i$. $\square$

On extrait une sous-suite λ'_i de la suite λ_i comme suit. Notons N^1 le sous-groupe engendré par V^1 . Soit W un supplémentaire α -invariant de N^1 dans N . On note λ'_2 la plus petite partie réelle de valeur propre de $\alpha|_W$. C'est l'un des nombres λ_i . On note N^2 le sous-groupe engendré par les espaces propres relatifs aux valeurs propres de partie réelle λ'_2 , etc.

6.7. Lemme. Soit u une fonction lisse sur un ouvert de N , invariante sous le groupe N^{i-1} . Alors $E_{p,k,\ell}(u)$ est fini et non nul seulement si $p = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/\lambda'_i$, et dans ce cas

$$E_{p,k,\ell}(u) = \ell^p \int |hu|^p dx.$$

Soit $x \in N$. Translatons à gauche la forme différentielle $du(x)$ pour en faire une forme linéaire sur l'algèbre de Lie. Posons

$$|hu|(x) = \sup \{ \langle du(x), v \rangle \mid v \in C \cap V^i \},$$

où C désigne la "boule unité" dans l'algèbre de Lie. Alors

$$E_{p,k,\ell}(u) = \ell^p \int |hu|^p dx.$$

En effet, montrons que, si x est un point d'une petite boule B , on a

$$\text{diamètre}(u(B)) \sim |hu(x)| \text{vol}(B)^{1/p}.$$

Si $B = e^{t\alpha}(\exp(C))$, on a $\text{vol}(B) \sim e^{\lambda'_i p t}$. D'autre part,

$$B = \{x \exp(e^{t\alpha} v) \mid v \in C\}.$$

Ecrivons $v = v_i + \dots + v_n$. En tenant compte de l'invariance sous N^{i-1} , on a, lorsque t tend vers $-\infty$,

$$\langle du(x), e^{t\alpha} v \rangle \sim e^{\lambda'_i t} \langle hu(x), v_i \rangle$$

d'où

$$u(y) - u(x) \sim \langle du(x), \log(y^{-1}x) \rangle \sim \langle hu(x), e^{\lambda' t} v_i \rangle.$$

Il vient

$$\text{diamètre } (u(B))^p \sim |hu(x)|^p e^{\lambda' p t} \sim |hu(x)|^p \text{vol}(B). \square$$

6.8. Proposition. Soit N un groupe nilpotent, α une dérivation semi-simple. Alors la "dimension" $r(N, \alpha)$ vaut

$$r(N, \alpha) = \frac{\text{tr } \alpha}{\lambda}$$

où λ est le plus petit réel tel que

$$\bigoplus_{\Re(\mu) < \lambda} \ker(\alpha - \mu)$$

n'engendre pas l'algèbre de Lie N .

En effet, d'après 6.6, pour $p > \text{tr } \alpha / \lambda$, une fonction continue d'énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ localement finie doit être N -invariante, i.e., constante.

Inversement, d'après 6.7 pour $p = \text{tr } \alpha / \lambda$, une fonction lisse non constante, invariante sous le dernier sous-groupe N^i a une énergie $E_{p,k,\ell}(u)$ localement finie et non nulle. $\square$

La fonctionnelle $E_{p,k,\ell}$ étant invariante par transformation quasiconforme, il résulte de la proposition précédente que, lorsque $\lambda \neq \lambda_1$, les feuilletages de N par les orbites des sous-groupes N^i sont invariants par toutes les transformations quasiconformes locales de N .

Le groupe résoluble $G = N \rtimes_{\alpha} \mathbf{R}$, produit semi-direct de N et $\mathbf{R}$, où le second facteur agit sur le premier par le groupe à un paramètre $e^{t\alpha}$, admet une métrique invariante à gauche à courbure négative. Le sous-groupe N agit sur la sphère à l'infini ∂G en laissant un point fixe, noté ∞ , et est simplement transitif sur $\partial G \setminus \infty$. Comme mentionné en 1.6, les deux structures quasiconformes obtenues sur N (celle définie en 1.3 et celle induite par ∂G , 1.5), sont équivalentes.

Le feuilletage défini par les orbites de N^1 sur $N \subset \partial G$ ne se prolonge pas au point ∞ de ∂G . On conclut que le point ∞ est fixé par toutes les transformations quasiconformes de ∂G . Il vient

6.9. Corollaire. Soit G un groupe de Lie connexe, extension d'un groupe nilpotent N par une dérivation semi-simple α à valeurs propres de partie réelle positive. Soit λ_1 la plus petite partie réelle de valeur propre. Supposons que l'algèbre de Lie N n'est pas engendrée par son sous-espace

$$\bigoplus_{\Re(\mu) = \lambda_1} \ker(\alpha - \mu).$$

Alors il existe un point de ∂G qui est fixé par toute quasiisométrie de G .

6.10. Lien entre capacités dans M et capacités dans ∂M . Soit M une variété simplement connexe à courbure sectionnelle $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$. Quelle correspondance il y a t'il entre fonctions sur M et fonctions sur ∂M ? Entre intégrales de Dirichlet $\int_M |du|^p$ dans M et énergies $E_{p,k,\ell}$ dans ∂M ?

Un élément de réponse se trouve dans [11]. Si une fonction sur M a son gradient dans L^p pour un $p > 1$, alors elle admet une valeur au bord, qui n'est pas nécessairement continue. Par exemple, si la courbure est constante, ∂M est la sphère standard S^{n-1} . La trace sur le bord de l'espace des fonctions dont le gradient est dans L^p est exactement l'espace de Besov $B_{n-1/p}^{p,p}$ si $p > n-1$, est réduite aux constantes si $p \leq n-1$. Il n'y a donc pas de correspondance directe entre l'intégrale de Dirichlet de u et l'énergie de sa valeur au bord.

Cependant, il semble qu'un lien existe. Notons $p(M)$ la borne supérieure des exposants p tels que la valeur au bord de toute fonction sur M dont le gradient est dans L^p soit constante, $p_{\text{loc}}(M)$ la même borne pour des fonctions définies seulement dans un voisinage dans $M \cup \partial M$ d'un point de ∂M . Il est frappant que, pour tous les espaces homogènes à courbure négative,

$$p(M) = q(M), \quad p_{\text{loc}}(M) = r(M).$$

6.11. Question. Lorsque M a un quotient compact, quelles inégalités relient les nombres $p(M)$, $q(M)$, $p_{\text{loc}}(M)$, $r(M)$?

Références

- [1] FEDERER, H.: Geometric measure theory. - Grundlehren der Mathematik 153 Springer Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, 1969.
- [2] GEHRING, F. W., and G. J. MARTIN: Discrete quasiconformal groups I. - Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, 1986, preprint.
- [3] GROMOV, M.: Asymptotic geometry of homogeneous spaces. - Proceedings of the conference "Differential Geometry on Homogeneous Spaces", Torino (1983), Rend. Sem. Mat. Polyt. Torino, Fasc. Spe., 1985.
- [4] GROMOV, M.: Structures métriques pour les variétés riemanniennes. - Notes de cours rédigées par J. Lafontaine et P. Pansu, CEDIC, Fernand-Nathan, Paris, 1981.
- [5] GROMOV, M., and W. THURSTON: Pinching constants for hyperbolic manifolds. - Inventiones Math. 89, 1987, 1-12.
- [6] HAMENSTÄDT, U.: Zur Theorie von Carnot-Caratheodory Metriken und ihren Anwendungen. - Bonner Math. Schriften 180, 1987.
- [7] HEINTZE, E.: On homogeneous manifolds of negative curvature. - Math. Ann. 211, 1974, 23-24.
- [8] MARGULIS, G. A.: Certain measures associated with U -flows on compact manifolds. - Funkt. Analis i Prilozh. 4, 1970, 55-67.
- [9] MOSTOW, G. D.: Strong rigidity of locally symmetric spaces. - Ann. of Math. Studies 78, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [10] PANSU, P.: Quasiconformal mappings and manifolds of negative curvature. - Proceedings of the Taniguchi Symposium "Curvature and Topology of Riemannian manifolds,

- Katata, 1985". Lecture Notes in Mathematics 1201. Springer-Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, 1986.
- [11] PANSU, P.: Quasiisométries des variétés à courbure négative. - Thèse, Université de Paris 7, 1987.
 - [12] SULLIVAN, D.: On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. - In "Riemann Surfaces and related topics, Stony Brook 1978". Ann. of Math. Studies 97, Princeton University Press, Princeton, 1981, 465-496.
 - [13] TUKIA, P.: A quasiconformal group not isomorphic to a Möbius group. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 6, 1981, 149-160.
 - [14] TUKIA, P., and J. VÄISÄLÄ: Quasisymmetric embeddings of metric spaces. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 5, 1980, 97-114.
 - [15] VÄISÄLÄ, J.: Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. - Lecture Notes in Mathematics 229. Springer-Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, 1971.
 - [16] VÄISÄLÄ, J.: Quasimöbius maps. - J. Anal. Math. 44, 1984/85, 218-234.
 - [17] VÄISÄLÄ, J.: Quasisymmetric maps of products of curves into the plane. - Université d'Helsinki, 1986, preprint.

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 Palaiseau Cedex
France

Received 29 January 1987

Revised 15 September 1988

Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 14, 1989, 213-224

BMO AND TEICHMÜLLER SPACE

D.H. Hamilton

1. Introduction

Let us consider the class Q_0 of quasiconformal maps F of the Riemann sphere fixing ∞ and conformal at ∞ with normalization $f(z) \sim z$ at ∞ . M. Reimann [18] proved that $\log \det(DF) \in \text{BMO}(\mathbb{R}^2)$. We show the connection of this with a fundamental result of Teichmüller theory. Let M_0 be the class of L^∞ functions μ with compact support and $\|\mu\| < 1$. Ahlfors and Bers [3] show that the solution $F \in Q_0$ of the Beltrami equation

$$\bar{\partial}F = \mu \partial F$$

depends holomorphically on μ . One formulation of Teichmüller space T (see Becker [4], Gehring [11]) on a fixed domain Ω containing ∞ is to set

$$T = \{\log F'(z) : F \in Q_0 \text{ conformal on } \Omega \text{ with quasiconformal extension}\}.$$

Then it is proved that, if Ω is a quasidisk, T is an open set in the space $\mathcal{B}(\Omega)$ of functions g analytic on Ω with

$$\|g\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\Omega} |g'(z)| \text{dist}(z, \partial\Omega) < \infty, \quad |zg(z)| \rightarrow 0 \quad \text{as } |z| \rightarrow \infty.$$

Now $\mathcal{B}(\Omega)$ is a closed subspace of the Bloch space. Coifman, Rochberg and Weiss [8] prove that $\mathcal{B}(\Omega)$ is the class of analytic functions BMO with respect to Ω . Furthermore, by Jones [12], if Ω is a quasidisk every $g \in \mathcal{B}(\Omega)$ has an extension to a function of $\text{BMO}(\mathbb{R}^2)$.

We remove the assumption that Ω is a quasidisk, and the restriction to considering $\log \partial F$ where F is conformal. The formula $\log \partial F$ will be defined first for smooth F . Now we do not take the principle branch of $\arg \partial F$ but a continuous value so that $\log \partial F$ depends holomorphically on μ and is essentially unique.

Research supported in part by National Science Foundation Grant 8501509.

AMS classification: 30C