

Chapitre 5 : Surfaces à courbure constante

Pierre Pansu

July 12, 2005

Avant de se lancer dans la description des surfaces riemanniennes compactes à courbure -1 , on donne une preuve du théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces riemanniennes compactes. Les généralisations de ce théorème feront l'objet d'un chapitre ultérieur, sur les classes caractéristiques des fibrés vectoriels.

1 Théorème de Gauss-Bonnet

1.1 La 1-forme de connexion d'un champ de repères local

Soit M une variété riemannienne de dimension 2. Etant donné un champ de repère orthonormé local (e_1, e_2) , une connexion métrique ∇ (par exemple, la connexion de Levi-Civita) s'exprime au moyen de deux fonctions qu'on peut interpréter comme les composantes d'une 1-forme différentielle. En effet, pour une connexion quelconque, $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$ où ∇^0 est la connexion naïve du repère (e_1, e_2) , et Γ est un tenseur de type $(2, 1)$, qu'on peut voir comme une matrice de 1-formes différentielles

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

où α_{ij} est définie pour tout vecteur tangent v par

$$\alpha_{ij}(v) = (\nabla_v e_i) \cdot e_j$$

Si la connexion est métrique, cette matrice est *antisymétrique*,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

où on a noté $\alpha = \alpha_{12}$, de sorte que

$$\nabla e_1 = \alpha \otimes e_2, \quad \nabla e_2 = -\alpha \otimes e_1,$$

i.e.

$$\Gamma = \alpha \otimes J$$

où J désigne la rotation de $\pi/2$ dans le plan tangent, dont la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 1.1 On appelle α la 1-forme de connexion du repère (e_1, e_2) .

1.2 Changement de repère

La forme différentielle α dépend du choix de champ de repère local. En effet, si

$$e'_1 = \cos(\phi)e_1 + \sin(\phi)e_2, \quad e'_2 = -\sin(\phi)e_1 + \cos(\phi)e_2$$

est un autre champ de repère local définissant la même orientation, où ϕ est une fonction sur M , alors la 1-forme correspondante est

$$\alpha' = \alpha + d\phi.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \nabla_v e'_1 &= (\nabla_v \phi)(-\sin(\phi)e_1 + \cos(\phi)e_2) + \cos(\phi)\nabla_v e_1 - \sin(\phi)\nabla_v e_2 \\ &= (\nabla_v \phi)e'_2 + \alpha(v)(\cos(\phi)e_2 - \sin(\phi)e_1) \\ &= (\nabla_v \phi + \alpha(v))e'_2. \end{aligned}$$

Si on change l'orientation, par exemple en changeant e_2 en $-e_2$, alors α change de signe.

Ceci indique que la quantité $d\alpha$ ne dépend pas du choix de champ de repère local, seulement de l'orientation.

1.3 1-forme de connexion et courbure

Proposition 1.2 *Soit M une variété riemannienne orientée de dimension 2. Soit α la 1-forme de connexion d'un champ de repère orthonormé direct local quelconque. Alors*

$$d\alpha = -K \text{ vol} \tag{1}$$

où vol est l'élément de volume associé à l'orientation et la métrique.

Preuve. Soit (V, W) un champ de repères orthonormé direct local, et $\alpha = (\nabla V) \cdot W$. On calcule

$$\begin{aligned} d\alpha(V, W) &= d(\alpha(W))(V) - d(\alpha(V))(W) - \alpha([V, W]) \\ &= \nabla_V((\nabla_W V) \cdot W) - \nabla_W((\nabla_V V) \cdot W) - (\nabla_{[V, W]} V) \cdot W \\ &= (\nabla_V \nabla_W V) \cdot W + (\nabla_W V) \cdot (\nabla_V W) - (\nabla_W \nabla_V V) \cdot W \\ &\quad - (\nabla_V V) \cdot (\nabla_W W) - (\nabla_{[V, W]} V) \cdot W \\ &= (R_{V, W} V) \cdot W \end{aligned}$$

car $\nabla_W V$ est orthogonal à V , $\nabla_V W$ est orthogonal à W , donc ces deux vecteurs sont orthogonaux. De même, $\nabla_V V$ est orthogonal à V , $\nabla_W W$ est orthogonal à W , donc ces deux vecteurs sont orthogonaux. ■

1.4 Courbure géodésique

Soit M une variété riemannienne de dimension 2, soit c une sous-variété de dimension 1 de M . Soit ν un vecteur unitaire normal à c en P . Alors la seconde forme fondamentale de c en P est déterminée par un nombre k appelé *courbure géodésique* (geodesic curvature) de c ,

$$II_P(v, v) = k|v|^2\nu.$$

Si c est paramétrée par son abscisse curviligne,

$$k = (\nabla_{c'} c') \cdot \nu.$$

Lemme 1.3 *Soit M une variété riemannienne orientée de dimension 2. Soit c une courbe paramétrée par son abscisse curviligne dans M . On note k sa courbure géodésique pour l'orientation normale $Jc'(s)$. Soit (e_1, e_2) un champ de repères orthonormé direct local. Ecrivons $c'(s) = \cos(\phi(s))e_1 + \sin(\phi(s))e_2$. Alors*

$$\alpha(c'(s)) = -\phi'(s) + k(s).$$

Autrement dit,

$$c^*\alpha = -d\phi + k ds.$$

Preuve. Par définition de la 1-forme de connexion,

$$\begin{aligned} \nabla_{c'(s)} c'(s) &= \phi'(s)(-\sin(\phi(s))e_1 + \cos(\phi(s))e_2) \\ &\quad + \cos(\phi(s))\nabla_{c'(s)} e_1 + \sin(\phi(s))\nabla_{c'(s)} e_2 \\ &= (\phi'(s) + \alpha(c'(s)))(-\sin(\phi(s))e_1 + \cos(\phi(s))e_2) \\ &= (\phi'(s) + \alpha(c'(s)))Jc'(s). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 1.4 *Théorème de Gauss-Bonnet pour les polygones. Soit D un polygone convexe dans \mathbf{R}^2 . Soit U un voisinage de D dans \mathbf{R}^2 . On munit U d'une métrique riemannienne de courbure de Gauss K . On oriente ∂D par la normale sortant de D . On note $\Delta\phi_1, \dots, \Delta\phi_k \in]-\pi, \pi[$ les angles de ∂D aux points où elle n'est pas lisse (voir figure). Alors*

$$\int_c k ds + \sum_{i=1}^k \Delta\phi_i + \int_D K dA = 2\pi.$$

Preuve. Soit (e_0, e'_0) un champ de repères constant sur \mathbf{R}^2 . Par orthonormalisation de Schmidt, on en déduit un champ de repères (e_1, e_2) orthonormé pour la métrique riemannienne sur U . On fixe pour origine un point P sur un côté ∂D , et on note $s \mapsto c(s)$, $s \in [0, L]$, la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'origine P de ∂D , telle que $Jc'(s)$ soit la normale rentrante. On choisit une détermination ϕ_0 de l'angle entre e_1 et $c'(0)$. Elle se relève uniquement en une détermination $\phi(s)$ de

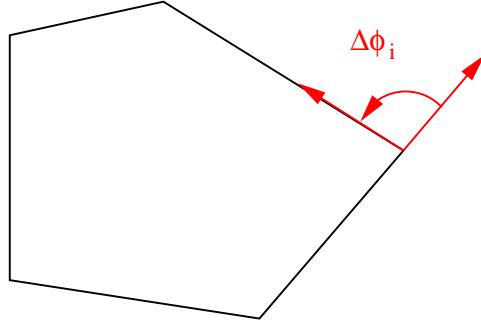


Figure 1: Angles d'un polygone convexe

l'angle entre e_1 et $c'(s)$, pour $s \in [0, L]$, telle que, au passage du i -ème sommet, ϕ saute de $\Delta\phi_i$. D'après le lemme 1.3,

$$\begin{aligned}
 -\phi(L) + \phi(0) + \sum_i \Delta\phi_i + \int_0^L k(s) ds &= -\int_0^L \phi'(s) ds + \int_0^L k(s) ds \\
 &= \int_c \alpha \\
 &= \int_D d\alpha \\
 &= -\int_D K dA.
 \end{aligned}$$

Il reste à évaluer $\phi(L) - \phi(0) = \Delta\phi(c)$. C'est un multiple entier de 2π qui dépend continuellement de la métrique riemannienne, donc ne dépend pas de la métrique, puisque deux métriques riemanniennes sont toujours liées par un chemin continu de métriques. On peut donc le calculer au moyen de la métrique euclidienne. Or pour un polygone convexe, $\Delta\phi_i$ est la mesure de l'ensemble N_i des vecteurs unitaires ν tels que le demi-plan d'appui orthogonal à ν contenant D touche D en son i -ème sommet. Les ensembles N_i constituent une partition du cercle unité privé d'un nombre fini de vecteurs (les normales sortantes des côtés), donc la somme des angles $\Delta\phi_i$ vaut 2π . On conclut que $\Delta\phi(c) = 2\pi$, d'où la formule annoncée. ■

1.5 Théorème de Gauss-Bonnet

Définition 1.5 Soit M une variété de dimension 2. Une décomposition lisse en cellules (*smooth cell decomposition*) de M , c'est la donnée d'une famille finie d'arcs a_i de classe C^2 plongés dans M appelés arêtes (*edges*) tels que

- deux arêtes ne se coupent qu'en leurs extrémités ;
- pour chaque composante connexe D du complémentaire de la réunion des arêtes, il existe un voisinage de l'adhérence de D qui est l'image par un difféomorphisme Φ d'un ouvert U du plan, tel que $\Phi^{-1}(D)$ soit un polygone convexe.

Dans ce cas, on appelle *sommets* (**vertices**) de la décomposition les extrémités des arêtes et *faces* (**faces**) de la décomposition les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Noter que la définition choisie est un peu trop restrictive, car les faces ont forcément des angles saillants. Le cas général s'y ramène en ajoutant des arêtes.

Théorème 1 Gauss-Bonnet. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension 2 à bord géodésique (le bord peut être vide). Soit τ une décomposition en cellules de M . On note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Alors*

$$\int_M K d|vol| = 2\pi(S - A + F).$$

On ne suppose pas la variété M orientable. L'intégrale $\int_M K d|vol|$ est celle d'une fonction, la courbure de Gauss, par rapport à une mesure positive, l'aire absolue.

Le théorème affirme simultanément que l'intégrale ne dépend pas de la métrique riemannienne choisie, et que la somme $S - A + F$ ne dépend pas de la décomposition en cellules choisie.

Définition 1.6 *Le nombre $S - A + F$ s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré (**Euler-Poincaré characteristic**) de la variété M .*

Preuve. On additionne les contributions des faces. Chaque arête qui ne fait pas partie du bord appartient à exactement deux faces qui induisent des orientations normales opposées, les intégrales de courbure géodésique se compensent exactement. Pour les arêtes du bord, la courbure géodésique est nulle, par hypothèse. Il n'y a donc pas d'intégrale de courbure géodésique dans la formule finale. Il ne reste plus qu'à additionner les angles $\Delta\phi$. Pour cela, on fixe momentanément une orientation au voisinage de chaque sommet (aucune compatibilité entre différents sommets n'est nécessaire). Il y a un tel angle par triplet (s, a, f) formé d'un sommet s , d'une arête orientée a émanant de s et d'une face f dont le bord contient a et qui est sur la gauche lorsqu'on avance le long de a . On remarque que $\pi - \Delta\phi(s, a, f)$ est l'angle entre deux arêtes consécutives dans l'ordre circulaire des arêtes émanant de s .

Supposons d'abord M sans bord. Dans ce cas, pour chaque sommet s ,

$$\sum_{(a,f)} (\pi - \Delta(s, a, f)) = 2\pi,$$

d'où

$$\sum_{(s,a,f)} (\pi - \Delta(s, a, f)) = \sum_s 2\pi = 2\pi S,$$

autrement dit,

$$\sum_{(s,a,f)} \Delta(s, a, f) = -2\pi S + \sum_{(s,a,f)} \pi.$$

Or chaque arête orientée a appartient à exactement un triplet : s est l'origine de a et f la face de gauche au sens de l'orientation au voisinage de s . Par conséquent le nombre de triplets est $2A$. Il vient

$$\sum_{(s,a,f)} \Delta(s, a, f) = -2\pi S + 2\pi A.$$

Avec la proposition 1.4,

$$\begin{aligned} \int_M K d|vol| &= \sum_f \int_f K d|vol| \\ &= \sum_f (2\pi - \int_{\partial f} k ds - \sum_{(s,a)} \Delta\phi(s, a, f)) \\ &= 2\pi F - \sum_{(s,a,f)} \Delta\phi(s, a, f) \\ &= 2\pi F + 2\pi S - 2\pi A. \end{aligned}$$

Lorsque M a un bord non vide, il faut orienter le bord (une variété de dimension 1 est toujours orientable), choisir les orientations au voisinage des sommets du bord en combinant l'orientation du bord et la normale sortante.

Pour un sommet du bord, la somme des angles vaut π et non 2π . Par conséquent, il faut introduire le nombre de sommets intérieurs S_{int} et de sommets du bord S_{bord} ,

$$\sum_{(s,a,f)} (\pi - \Delta(s, a, f)) = 2\pi S_{int} + \pi S_{bord}.$$

Alors que chaque arête orientée intérieure appartient à un unique triplet (s, a, f) , sur le bord, une seule des deux orientations donne lieu à triplet (s, a, f) . Par conséquent,

$$\sum_{(s,a,f)} \pi = 2\pi A_{int} + \pi A_{bord},$$

d'où

$$\sum_{(s,a,f)} \Delta(s, a, f) = 2\pi(A_{int} - S_{int}) + \pi(A_{bord} - S_{bord}),$$

puis

$$\begin{aligned} \int_M K d|vol| &= 2\pi(F - A_{int} + S_{int}) + \pi(S_{bord} - A_{bord}) \\ &= 2\pi\chi(M) - \pi\chi(\partial M). \end{aligned}$$

Enfin, $\chi(\partial M) = 0$ car le bord est une réunion de cercles. ■

1.6 Premières conséquences

Remarque 1.7 Soit M une variété à bord compacte de dimension 2. Supposons que M possède une métrique riemannienne à courbure constante κ qui rend le bord géodésique. Alors

$$\kappa > 0 \Rightarrow \chi(M) > 0, \quad \kappa = 0 \Rightarrow \chi(M) = 0, \quad \kappa < 0 \Rightarrow \chi(M) < 0.$$

Les variétés compactes connexes sans bord orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier pair ≤ 2 . Les variétés compactes connexes sans bord non orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier ≤ 1 . Par conséquent, il y a deux variétés compactes connexes sans bord de dimension 2 à $\chi > 0$, ce sont la sphère ($\chi = 2$) et le plan projectif réel ($\chi = 1$), et deux variétés compactes connexes sans bord de dimension 2 à $\chi = 0$, ce sont le tore et la bouteille de Klein. On peut décrire le tore comme le quotient du plan euclidien par un groupe engendré par deux translations linéairement indépendantes, et la bouteille de Klein par le quotient du plan euclidien par le groupe engendré par une translation de vecteur v et une translation de vecteur $w \neq 0$ orthogonal à v suivie d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite parallèle à w . Cela donne des métriques à courbure nulle sur le tore et la bouteille de Klein.

Toutes les autres variétés compactes connexes sans bord de dimension 2 ont une caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative. On va s'employer à construire des métriques à courbure -1 sur toutes ces variétés.

2 Le plan hyperbolique

La géométrie hyperbolique est la plus ancienne des géométries non euclidiennes. Elle a été fondée indépendamment par Bolyai, Lobatchevskii, Gauss vers 1823, lors de leurs recherches sur l'indépendance du 5^e postulat d'Euclide. La géométrie elliptique, i.e. celle du plan projectif réel, constitue aussi une preuve de l'indépendance du 5^e postulat, mais cela n'a été compris que plus tard. C'est Riemann qui a dégagé l'idée que les trois géométries euclidienne, hyperbolique et elliptique peuvent être décrites par une donnée infinitésimale, ce qui l'a conduit à la notion générale de métrique riemannienne.

On va donner quelques détails sur les modèles utiles de la géométrie hyperbolique en 2 dimensions.

2.1 La pseudosphère

C'est la surface $\Psi = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^{2,1} \mid X^2 + Y^2 - Z^2 = -1, Z > 0\}$ munie de la métrique induite par la forme quadratique $dX^2 + dY^2 - dZ^2$.

Les géodésiques sont les traces des 2-plans passant par l'origine.

Le groupe d'isométries est le sous-groupe $O_0(2, 1)$ de $Gl(3, \mathbf{R})$ formé des matrices M telles que $M^T Q M = Q$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et dont le coefficient m_{33} est positif. En effet, préserver la pseudosphère, c'est envoyer le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur un vecteur dont la troisième composante est positive, ce qui se traduit par $m_{33} > 0$.

Pour chacun des autres modèles, on va détailler les géodésiques et le groupe d'isométries.

2.2 Le disque unité

On munit le disque unité $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ de la métrique

$$\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \frac{dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}.$$

Proposition 2.1 *Le groupe des isométries du disque pour la métrique de Poincaré s'identifie au groupe des bijections holomorphes et antiholomorphes du disque.*

Les bijections holomorphes sont les restrictions au disque des homographies de la forme

$$z \mapsto \frac{e^{i\theta} z + a}{\bar{a} e^{i\theta} z + 1}$$

où $a \in D$ et $\theta \in \mathbf{R}$. *Les bijections antiholomorphes sont de la forme*

$$z \mapsto \frac{e^{i\theta} \bar{z} + a}{\bar{a} e^{i\theta} \bar{z} + 1}.$$

En particulier, ces isométries agissent continûment sur le disque fermé.

Preuve. Comme la métrique de Poincaré est conforme à la métrique euclidienne, toute isométrie de la métrique de Poincaré est une bijection conforme du disque, donc holomorphe ou antiholomorphe suivant qu'elle préserve ou non l'orientation.

Inversement, soit f une bijection holomorphe du disque. Montrons que f diminue la distance de Poincaré. Etant donné $z_0 \in D$, soient g_1 et g_2 des isométries telles que $z_0 = g_1(0)$ et $g_2(f(z_0)) = 0$. De telle isométries existent car le groupe des isométries est transitif sur la pseudosphère. Alors $h = g_2 \circ f \circ g_1$ est holomorphe. Soit C_r le cercle de rayon r . La formule de Cauchy donne

$$\begin{aligned} |h'(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{h(z) dz}{z^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|dz|}{r^2} \\ &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

En faisant tendre r vers 1, on trouve que $|h'(0)| \leq 1$ donc h diminue la métrique de Poincaré en 0, donc f diminue la métrique de Poincaré en z_0 . En appliquant cette propriété à f^{-1} , on conclut que f est une isométrie.

Posons $a = f(0)$, $g(z) = \frac{z+a}{az+1}$. Alors $g^{-1} \circ f$ est une isométrie du disque fixant l'origine et préservant l'orientation. Sa différentielle en 0 est donc une rotation ρ , dont l'angle est noté θ . Comme ρ est une isométrie de la métrique de Poincaré, $\rho^{-1} \circ g^{-1} \circ f$ est une isométrie qui fixe 0 et dont la différentielle en 0 est l'identité, donc c'est l'identité. On conclut que

$$f(z) = g \circ \rho(z) = \frac{e^{i\theta}z + a}{\bar{a}e^{i\theta}z + 1}.$$

Si f est une bijection antiholomorphe (resp. une isométrie renversant l'orientation, $f(\bar{z})$ est une bijection holomorphe, d'où la conclusion. ■

Exercice 1 Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On note $U(1, 1)$ le sous-groupe de $Gl(2, \mathbf{C})$ formé des matrices M telles que $M^*HM = H$. On note $PU(1, 1)$ son image dans $PGL(2, \mathbf{C})$. Montrer que l'action par homographies sur la droite projective complexe $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, donnée par

$$PU(1, 1) \times \mathbf{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}, \quad \left(\begin{pmatrix} u & s \\ v & t \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{uz + s}{vz + t}.$$

préserve le disque unité, et induit un isomorphisme de $PU(1, 1)$ sur le groupe des bijections holomorphes du disque.

Proposition 2.2 Les géodésiques sont les arcs de cercles et les segments de droites orthogonaux au bord.

Preuve. Montrons que les homographies envoient les cercles et les droites sur des cercles ou des droites. Comme toute homographie est la composée de translations $z \mapsto z + a$, de similitudes $z \mapsto uz$ et de l'application $z \mapsto 1/z$, il suffit de le vérifier pour chaque type d'application. Si on est savant, on remarque que $z \mapsto 1/z$ est la composition de la symétrie $z \mapsto \bar{z}$ et de l'inversion $z \mapsto z/|z|^2$, qui possèdent cette propriété. Sinon, on applique le théorème de l'arc capable : tout cercle passant par des points distincts P et Q est défini par une équation de la forme

$$\text{Arg}\left(\frac{z - P}{z - Q}\right) = \theta \bmod \pi.$$

Son image par $z \mapsto 1/z$, donnée par l'équation

$$\text{Arg}\left(\frac{z - \frac{1}{P}}{z - \frac{1}{Q}}\right) = \theta - \text{Arg}\left(\frac{P}{Q}\right) \bmod \pi,$$

est à nouveau un cercle.

On sait déjà que les géodésiques de la métrique de Poincaré passant par l'origine sont les diamètres du disque, ils sont orthogonaux au bord. Les autres géodésiques s'obtiennent en appliquant des homographies préservant le disque, ce sont donc des arcs de cercles, orthogonaux au bord parce que les homographies sont conformes et préservent donc l'orthogonalité. ■

Proposition 2.3 *Par deux points distincts du cercle unité passe une et une seule géodésique du disque de Poincaré. Deux géodésiques γ_1 et γ_2 , d'extrémités respectives (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) , se coupent si et seulement si, sur le cercle unité, les points P_1 et Q_1 séparent P_2 de Q_2 .*

Preuve. Soient P et Q deux points distincts du cercle unité. S'ils sont diamétralement opposés, le segment $[P, Q]$ passe par l'origine, c'est une géodésique. Sinon, les tangentes au cercle en P et Q ne sont pas parallèles, elles se coupent en R qui est distinct de P et Q . Par symétrie de la figure, le triangle PQR est isocèle en R . Le cercle de centre R passant par P passe aussi par Q . Il est orthogonal au cercle unité. Il coupe le disque unité suivant une géodésique. Cette géodésique est contenue dans le plus petit des deux secteurs de sommet l'origine O délimités par les rayons OP et OQ .

Soit f une isométrie du disque. Alors f se prolonge en un homeomorphisme du disque fermé de façon compatible avec le prolongement des géodésiques. Il préserve les propriétés de séparation sur le bord. Cela permet de se ramener au cas où deux des points, par exemple (P_1, Q_1) , sont diamétralement opposés. Si P_2 et Q_2 sont de part et d'autre du diamètre $[P_1, Q_1]$, alors la géodésique de P_2 à Q_2 coupe le diamètre. Si P_2 et Q_2 sont du même côté du diamètre $[P_1, Q_1]$, alors le petit secteur délimité par OP_2 et OQ_2 est d'un seul côté, donc la géodésique de P_2 à Q_2 est d'un seul côté.

Voici un autre argument plus synthétique. Supposons que les points P_1 et Q_1 ne séparent pas P_2 de Q_2 , mais que les géodésiques correspondantes se coupent. Alors elles doivent se couper en au moins deux points R et R' . Comme le disque est simplement connexe et la métrique de Poincaré a une courbure négative, le théorème de Cartan-Hadamard affirme que R et R' ne sont reliés que par une seule géodésique, contradiction. ■

2.3 Le demi-plan supérieur

Il est muni de la métrique $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Proposition 2.4 *Les géodésiques du demi-plan supérieur sont des demi-droites ou des arcs de cercles orthogonaux à l'axe réel.*

Le sous-groupe des isométries s'identifie au groupe $PGL(2, \mathbf{R})$ des classes de matrices réelles 2×2 inversibles, à multiplication près par un réel non nul. Les matrices de déterminant positif agissent sur le demi-plan supérieur par homographies

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Les matrices de déterminant négatif agissent par

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Le groupe des isométries du demi-plan supérieur est simplement 3-transitif sur le bord $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, i.e. étant donnés deux triplets de points distincts (P, Q, R) et (P', Q', R') sur $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, il existe une unique isométrie qui envoie P en P' , Q en Q' et R en R' .

Preuve. On utilise l'homographie $\Phi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ qui envoie le demi-plan sur le disque. Elle envoie droites et cercles sur des droites ou des cercles, et préserve les angles. Par conséquent, les géodésiques du demi-plan sont contenus dans des droites ou des cercles orthogonaux au bord.

Φ conjugue les isométries du disque sur les isométries du demi-plan, qui sont donc aussi des homographies ou des antihomographies. Il reste à vérifier qu'une homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (resp. une antihomographie $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) envoie le demi-plan dans lui-même si et seulement si a, b, c et d sont réels et $ad - bc > 0$ (resp. $ad - bc < 0$).

L'action du groupe d'isométries sur le bord s'identifie donc à celle de $PGL(2, \mathbf{R})$ sur la droite projective réelle $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Le groupe projectif est simplement transitif sur les repères projectifs, par définition. En dimension 1, un repère projectif, c'est trois points distincts. ■

Remarque 2.5 *Ce n'est pas un hasard si les trois groupes $SO_0(2, 1)$, $PU(1, 1)$ et $PSL(2, \mathbf{R})$ sont isomorphes.*

En effet, soit G un groupe de Lie (i.e. une variété munie d'une multiplication et d'un inverse différentiables). Soit $H \subset G$ un sous-groupe compact. Alors l'espace quotient G/H des classes à droite de H possède une structure de variété, ainsi que des métriques riemanniennes invariantes par l'action de G : il suffit de choisir sur l'espace tangent $T_e G$ une forme quadratique définie positive invariante par l'action adjointe de H (différentielle de l'action $(h, g) \mapsto h^{-1}gh$ de H sur G). On obtient une métrique riemannienne G -invariante sur G qui passe au quotient.

Lorsque G/H est de dimension 2, on obtient une variété riemannienne homogène (groupe d'isométrie transitif) donc à courbure constante. Elle est connexe si G est connexe, simplement connexe si H est connexe, compacte si et seulement si G l'est. C'est le cas ici pour chacun des trois groupes, et H le sous-groupe qui va donner les rotations qui fixent un point ($H = SO(2) \subset SO_0(2, 1)$, $P(U(1) \times U(1)) \subset PU(1, 1)$, $P(SO(2)) \subset PSL(2, \mathbf{R})$). On obtient donc un espace modèle M^κ où $\kappa \leq 0$, soit seulement deux choix possible pour la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe d'isométries. Les trois groupes de matrices correspondent tous les trois au second choix ($\kappa < 0$), ils sont donc isomorphes.

Les trois groupes de matrices considérés sont simples. La classification des groupes de Lie simples simplement connexes de dimension 3 est presque élémentaire.

On en trouve 2, l'un est compact, c'est le groupe d'isométrie de la sphère M^κ , $\kappa > 0$, l'autre non. Par conséquent, les trois groupes $SO_0(2, 1)$, $PU(1, 1)$ et $PSI(2, \mathbf{R})$ sont isomorphes.

Le lien entre ces deux problèmes de classification (groupes de Lie simples/variétés riemanniennes *symétriques*) a été découvert par E. Cartan vers 1925. C'est l'un des piliers de la géométrie différentielle du XXème siècle.

Exercice 2 Soit M une variété de dimension 2 compacte sans bord à courbure -1 . Soit f une transformation de revêtement distincte de l'identité. Montrer que f laisse stable une géodésique γ du plan hyperbolique. Montrer que toute isométrie du plan hyperbolique qui commute avec f fixe γ .

Exercice 3 Soit M une variété de dimension 2 compacte sans bord à courbure -1 . Soit \bar{f} une isométrie de M qui est homotope à l'identité. Montrer que son relèvement au plan hyperbolique commute avec les transformations de revêtement. En utilisant l'exercice 2, montrer que $\bar{f} = id_M$. Conclure que le groupe des isométries de M est fini.

3 Surfaces de Riemann et géométrie hyperbolique

3.1 Surfaces de Riemann et structures conformes en dimension 2

Définition 3.1 On appelle communément surface de Riemann (*Riemann surface*) une variété complexe de dimension 1. Autrement dit, un espace topologique muni d'un atlas de cartes sur des ouverts de \mathbf{C} tel que les changements de cartes soient des bijections holomorphes. Un isomorphisme (*isomorphism*) entre surfaces de Riemann est un homéomorphisme qui, lu dans des cartes, est holomorphe.

Exemple 3.2 La droite affine \mathbf{C} . Ses automorphismes sont les similitudes directes $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$.

En effet, un automorphisme est *a fortiori* une fonction entière qui admet au pire un pôle simple à l'infini. ■

Exemple 3.3 Le disque unité D . Son groupe d'automorphismes a été déterminé en 2.1.

Exemple 3.4 La droite projective complexe $\mathbf{CP}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ a une structure de surface de Riemann. Son groupe d'automorphismes est le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

où $ad - bc \neq 0$.

En effet, on peut prendre un atlas à deux cartes $U_1 = \{|z| < 2\}$ avec l'homéomorphisme z , et $U_2 = \{|z| > 1/2\} \cup \{\infty\}$, avec l'homéomorphisme w qui vaut $1/z$ sur $\{|z| > 1/2\}$ et 0 en ∞ . Le changement de carte $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $U_1 \cap U_2$.

Un automorphisme de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ est *a fortiori* une fonction méromorphe f admettant au plus un pôle simple, et telle que $f(1/z)$ admette au pire un pôle simple en 0, donc c'est une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont de degré 1. ■

Proposition 3.5 *Toute métrique riemannienne sur le 2-tore ou sur la bouteille de Klein est conforme à une métrique à courbure nulle, unique à proportionnalité près.*

Preuve. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 2. La formule pour le comportement de la courbure sous un changement conforme donne que la métrique $e^{2u}g_M$ est à courbure nulle si et seulement si $\Delta u = -K$. Par le principe du maximum, le noyau de Δ est réduit aux fonctions constantes. Deux solutions u et u' de l'équation $\Delta u = -K$ diffèrent d'une constante, donc donnent des métriques proportionnelles.

L'existence repose sur l'alternative de Fredholm pour le laplacien (valable sur toute variété riemannienne compacte) : étant donnée une fonction $f \in L^2$ sur M , l'équation $\Delta u = f$ possède une solution $u \in L^2_2$ si et seulement si f est orthogonale au noyau de l'adjoint de Δ , lequel n'est autre que Δ lui-même. Par conséquent la condition sur f est que $\int_M f d|vol| = 0$. D'après la formule de Gauss-Bonnet, sur le tore ou la bouteille de Klein, la courbure satisfait cette condition. Il existe donc une fonction u telle que $\Delta u = -K$. Un théorème de régularité donne que u est C^∞ . Alors la métrique $e^{2u}g_M$ est à courbure nulle. ■

Corollaire 3.6 (Gauss, Korn-Lichtenstein). *Toute variété riemannienne de dimension 2 est localement conforme au plan euclidien. Par conséquent, une variété riemannienne orientée de dimension 2 possède une structure naturelle de surface de Riemann, pour laquelle la multiplication par $i = \sqrt{-1}$ dans le plan tangent devient la rotation de $\pi/2$.*

Preuve. Soit g une métrique riemannienne sur le disque unité. Une combinaison $f(r)g + (1 - f(r))g_{eucl}$, où f est lisse, à support dans $[0, 1[$ et vaut 1 au voisinage de 0, donne une métrique sur le plan qui coïncide avec la métrique euclidienne hors du disque unité. On peut la rendre périodique, et obtenir ainsi une métrique sur le tore. D'après la proposition 3.5, elle est conforme à une métrique g_0 à courbure nulle. Au voisinage de 0, celle-ci est isométrique à la métrique euclidienne. On conclut qu'il existe un difféomorphisme ϕ et une fonction lisse u définis au voisinage de 0 tel que $\phi^*g_{eucl} = e^{2u}g$. Si M est orientée, quitte à composer ϕ avec une symétrie orthogonale, on peut supposer que ϕ préserve l'orientation.

L'ensemble des cartes conformes préservant l'orientation de M constitue un atlas, et les changements de cartes sont des difféomorphismes conformes préservant l'orientation, donc des bijections holomorphes. Cela définit la structure de surface de Riemann. Si $P \in M$, ϕ est une carte conforme au voisinage de P préservant

l'orientation et (v, w) est une base orthonormée directe de $T_P M$, $(d_P \phi(v), d_P \phi(w))$ est une base orthogonale directe du \mathbf{R} -espace vectoriel euclidien orienté \mathbf{C} , donc $d_P \phi(w) = i d_P \phi(v)$. Autrement dit, la multiplication par i pour la structure transportée par ϕ coïncide avec la rotation de $\pi/2$. ■

Théorème 2 Théorème de Rado. *Toute surface de Riemann est paracompacte.*

Définition 3.7 Soit M une variété complexe. Une métrique hermitienne (*Hermitian metric*) sur M est une métrique riemannienne pour laquelle la multiplication par i est une isométrie.

Corollaire 3.8 Dictionnaire entre surfaces de Riemann et variétés orientées de dimension 2 munies d'une classe conforme de métriques. *Soit M une surface de Riemann. Alors M possède des métriques hermitiennes, elles sont deux à deux conformes. Réciproquement, soit M une variété orientée de dimension 2, munie d'une classe conforme de métriques riemanniennes. Alors les métriques de la classe définissent la même structure de surface de Riemann, elles sont hermitiennes relativement à cette structure.*

3.2 Correspondance entre surfaces de Riemann et variétés riemanniennes de dimension 2 à courbure constante

La proposition 3.5 attache à chaque surface de Riemann difféomorphe au tore une métrique à courbure nulle, presque unique. Cette méthode est limitée (elle s'étend néanmoins à toute surface de Riemann compacte de caractéristique d'Euler-Poincaré négative, elle devient plus difficile car l'équation à résoudre est non linéaire). Une autre méthode donne un résultat plus général.

Théorème 3 Théorème de représentation conforme de Riemann, Poincaré, Koebe. *Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à la droite projective, à la droite affine ou au disque unité.*

Preuve. Voir par exemple le livre de L.V. Ahlfors, *Conformal invariants. Topics in geometric function theory*. McGraw Hill (1973). ■

Corollaire 3.9 Soit M une surface de Riemann. Alors M possède une métrique hermitienne complète à courbure constante.

Preuve. Le revêtement universel de M est une surface de Riemann simplement connexe \tilde{M} , et le groupe fondamental de M est un groupe discret de bijections holomorphes de \tilde{M} .

Si \tilde{M} est isomorphe au disque unité, le groupe fondamental de M agit sans points fixes par isométries de la métrique de Poincaré (proposition 2.1), donc celle-ci passe au quotient en une métrique hermitienne complète à courbure -1 sur M .

Si \tilde{M} est la droite affine, le groupe fondamental de M agit sans points fixes par similitudes $z \mapsto az+b$ sur \mathbf{C} . Si $a \neq 1$, l'application $z \mapsto az+b$ possède un point fixe. On conclut que le groupe fondamental agit par translations, donc par isométries de la métrique euclidienne, donc celle-ci passe au quotient en une métrique hermitienne complète à courbure 0 sur M .

Si \tilde{M} est la droite projective, M est compacte de groupe fondamental fini. Tout homéomorphisme préservant l'orientation de la droite projective possède un point fixe. Par conséquent, le groupe fondamental est trivial, M est la droite projective, qui possède une métrique hermitienne à courbure 1, c'est la métrique canonique de la sphère lue par projection stéréographique, qui s'écrit

$$\frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$$

dans les coordonnées de l'exemple 3.4. ■

Définition 3.10 *Une surface de Riemann est dite de type hyperbolique si son revêtement universel est le disque.*

Définition 3.11 *Soit M une variété riemannienne complète orientée de dimension 2 à courbure -1 . Alors, en tant que surface de Riemann, elle est de type hyperbolique. Réciproquement, si M est une surface de Riemann de type hyperbolique, alors M possède une et une seule métrique hermitienne complète à courbure -1 . On l'appelle parfois la métrique de Poincaré de M .*

Preuve. Supposons M riemannienne complète à courbure -1 . Le revêtement universel de M possède une métrique hermitienne complète à courbure -1 , nécessairement isométrique au disque muni de la métrique de Poincaré. Il est donc isomorphe au disque, donc M est de type hyperbolique.

Soit M une surface de Riemann de type hyperbolique. D'après le corollaire 3.9, on peut équiper M d'une métrique à courbure -1 . Soit M' une autre variété riemannienne complète à courbure -1 , isomorphe à M en tant que surface de Riemann. Il existe donc une bijection conforme $h : M \rightarrow M'$ et des isométries $f : \tilde{M} \rightarrow D$ et $f' : \tilde{M}' \rightarrow D$. Alors $f' \circ h \circ f^{-1} : D \rightarrow D$ est une bijection conforme, donc c'est une isométrie, d'après 2.1. Par conséquent, h est une isométrie. On conclut que parmi les métriques hermitiennes complètes sur M , il y en a exactement une à courbure -1 . ■

4 Plomberie

On va construire des exemples de métriques à courbure -1 , en collant ensemble des morceaux modelés sur le plan hyperbolique, le demi-plan hyperbolique ou le quart de plan hyperbolique.

4.1 Surfaces à angles droits

Définition 4.1 Une surface hyperbolique à angles droits est un espace métrique complet M tel que pour chaque point $P \in M$ il existe $r > 0$ tel que la boule $B(P, r)$ soit isométrique

1. à une boule de rayon r du plan hyperbolique ;
2. à une boule de rayon r centrée en un point du bord du demi-plan hyperbolique ;
3. à une boule de rayon r centrée au sommet d'un quart de plan hyperbolique.

L'intérieur de M est l'ensemble des points où le premier modèle a lieu. Les points justiciables du second modèle forment le bord de M . Ceux qui correspondent au troisième modèle s'appellent les sommets.

Si le troisième cas ne se produit pas, on parle de surface hyperbolique à bord géodésique.

Une arête ouverte est une composante connexe du bord. Elle peut être de trois types

1. à deux sommets distincts ;
2. à deux sommets confondus ;
3. sans sommets (compacte).

Exemple 4.2 Tout polygone à angles droits du plan hyperbolique est une surface hyperbolique à angles droits.

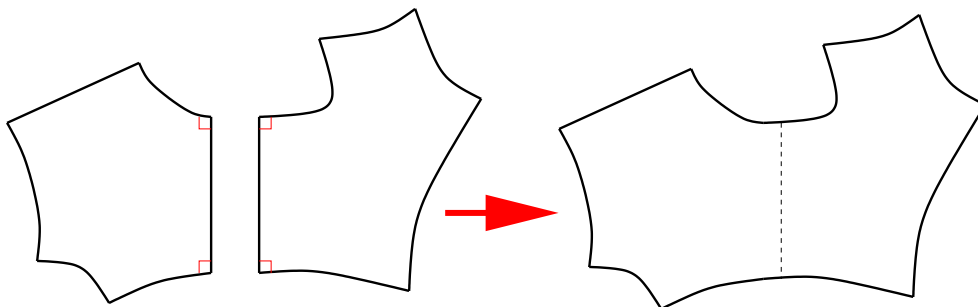
Remarque 4.3 Dans une surface hyperbolique à angles droits, les plus courts chemins évitent le bord et les sommets. Par conséquent, le théorème de Hopf-Rinow s'étend à ce type de surface : deux points sont toujours reliés par au moins une géodésique, les boules fermées sont compactes.

Proposition 4.4 Soient M_1, M_2 deux surfaces hyperboliques à angles droits. Soient $a_1 \subset M_1, a_2 \subset M_2$ des arêtes de même longueur finie et de même type choisi parmi les suivants : deux sommets distincts, sans sommets. Eventuellement, $M_1 = M_2$ et même $a_1 = a_2$. On se donne une isométrie $\iota : a_1 \rightarrow a_2$. Si $a_1 = a_2$, on suppose que ι est d'ordre fini et n'a pas de points fixes. Alors l'espace $M_1 \cup_\iota M_2$ obtenu en identifiant, dans la réunion disjointe $M_1 \amalg M_2$ chaque point $x \in a_1$ à $\iota(x) \in M_2$ si $a_1 \neq a_2$ (resp. en identifiant tous les points d'une orbite de ι si $a_1 = a_2$) est une surface hyperbolique à angles droits, dans laquelle les points de a_1 et a_2 sont devenus des points intérieurs et les quatre sommets éventuels de a_1 et a_2 sont devenus des points du bord.

Preuve. On définit la longueur d'une courbe γ dans M comme la somme des longueurs de $\gamma \cap M_1$ et de $\gamma \setminus M_1$. Les adhérences de a_1 et a_2 étant compactes, on peut les recouvrir par un nombre fini de boules $B(P_j, r_j)$ isométriques aux modèles locaux. Si $a_1 = a_2$, on demande de plus que les images de $a_1 \cap B(P_j, r_j)$ par les itérés de ι soient deux à deux disjointes. Il existe $r > 0$ tel que toute boule de rayon r rencontrant l'adhérence de l'ensemble a quotient de a_1 et de a_2 soit contenue dans l'une des $B(p_j, r_j)$. Alors toute courbe de longueur $< r$ dans M rencontrant a se croise dans l'un des modèles locaux suivants

1. la réunion de deux demi-boules hyperboliques identifiées le long de la coupure, i.e. une boule du plan hyperbolique ;
2. la réunion de deux quarts de boules hyperboliques identifiés le long d'exactlyement une des deux coupures, i.e. une boule du demi-plan hyperbolique.

Cela prouve que M est complète, que les points de a_1 et a_2 sont devenus des points intérieurs et les sommets éventuels de a_1 et a_2 , s'il y en avait, sont devenus des points du bord. ■



Exemple 4.5 *Double d'une surface hyperbolique à bord géodésique.*

On prend pour M_1 et M_2 deux exemplaires de la même surface hyperbolique à bord. On suppose que chaque composante du bord est de longueur finie. On utilise l'identité comme identification de ∂M_1 et ∂M_2 . On obtient une surface hyperbolique sans bord, munie d'une involution isométrique qui échange les deux moitiés M_1 et M_2 .

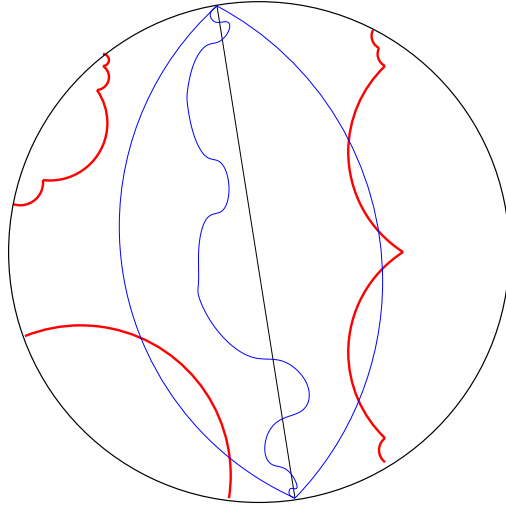
4.2 Bord à l'infini d'une surface hyperbolique à coins droits

En vue d'un usage ultérieur, on va établir une propriété remarquable des surfaces à courbure négative, qui permet de rendre canoniques des constructions topologiques. On a besoin de la notion de *bord à l'infini* d'une surface hyperbolique à coins droits.

Lemme 4.6 *Soit M une surface hyperbolique à coins droits simplement connexe. M peut être vue comme un polyèdre convexe du plan hyperbolique. L'adhérence de ce polyèdre dans le disque unité fermé est homéomorphe à un disque fermé. Elle contient une partie compacte du cercle unité appelée bord à l'infini (*ideal**

boundary) de M . Toute géodésique semi-infinie de M converge vers un point du bord à l'infini. Si une courbe est à distance bornée d'une géodésique semi-infinie, elle converge vers le même point à l'infini

Preuve. On généralise sans difficulté le théorème de Cartan-Hadamard aux surfaces à coins droits simplement connexes : l'exponentielle en un point intérieur P est un homéomorphisme d'un domaine U à bord lisse par morceaux du plan tangent $T_P M$ sur M . Sur l'intérieur de ce domaine, l'exponentielle est un difféomorphisme. En coordonnées polaires, la métrique s'écrit $dr^2 + \sinh(r)^2 d\theta^2$. On obtient ainsi le plongement $M \rightarrow U \rightarrow (T_P M, dr^2 + \sinh(r)^2 d\theta^2)$ qui est isométrique au plan hyperbolique. Comme M est étoilé par rapport à chacun de ses points, il est convexe.



L'homéomorphisme d'un disque sur M s'obtient comme suit. Etant donné un point intérieur P et un vecteur unitaire $v \in T_P M$, on note $\tau(v) \in]0, +\infty]$ la longueur totale de la géodésique issue de P avec vitesse initiale v . Alors la fonction τ est continue. Soit U le disque unité de $T_P M$. Alors l'application

$$D \rightarrow M, \quad rv \mapsto \exp_P((1 - t + \tau(v)^{-1})^{-1}v)$$

est un homéomorphisme.

La convergence des géodésiques semi-infinies et des courbes qui restent à distance bornée d'une telle géodésique est une propriété du disque unité muni de la métrique de Poincaré : le lieu des points à distance $\leq R$ d'une géodésique γ est une lentille bordée par deux arcs de cercle qui passent par les points à l'infini de γ . Une courbe piégée dans cette lentille et partant à l'infini doit converger vers l'un de ces points. ■

Lemme 4.7 *Soit M une surface hyperbolique à angles droits. Soit $\alpha : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (M, a, b)$ un arc sans points doubles reliant deux arêtes de longueur finie a et b du bord. Alors α est homotope (relativement à a et b) à un unique arc géodésique simple orthogonal à a et à b . A moins que ce soit une arête, seules les extrémités de cet arc sont sur le bord. Supposons de plus M compacte. Soit $c : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow M$*

une courbe fermée simple. Alors c est homotope à une unique géodésique fermée simple. A moins que ce soit une arête, cette géodésique est entièrement intérieure à M . Soient $c_1, c_2 : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow M$ deux courbes fermées sans points doubles disjointes. Les géodésiques fermées qui leur sont homotopes ne se coupent pas, à moins qu'elles soient confondues.

Preuve. Comme les boules sont compactes, toute classe d'homotopie d'arcs dont une extrémité (au moins) est piégée dans un compact (l'adhérence d'une arête) contient un arc γ de longueur minimum. En utilisant les modèles locaux, dans lesquels les plus courts chemins sont connus, on voit que γ est une géodésique lisse. Si elle rencontre une arête ailleurs qu'en une extrémité, elle lui est confondue. Si une de ses extrémités est un sommet, elle est confondue avec une des arêtes issues de ce sommet. Dans tous les cas, γ est un arc géodésique orthogonal aux arêtes qui doivent contenir ses extrémités.

Montrons que γ n'a pas de points doubles. Relevons α et γ au revêtement universel de M , vu comme un disque fermé privé d'une partie compacte du cercle, le bord à l'infini de \tilde{M} . Comme α n'a pas de points doubles, l'image réciproque de α est une réunion disjointe d'arcs reliant des arêtes. Deux relèvements distincts $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ ont leurs extrémités sur des arêtes distinctes a_1^\pm et a_2^\pm , et la paire d'intervalles (a_1^-, a_1^+) ne sépare pas la paire d'intervalles (a_2^-, a_2^+) sur le cercle. A chaque relèvement $\tilde{\alpha}_i$ correspond un relèvement $\tilde{\gamma}_i$ de γ dont les extrémités sont sur les mêmes arêtes a_i^\pm de \tilde{M} . Supposons que deux relèvements $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ se coupent. A cause de la propriété de non séparation, $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ se coupent en au moins deux points. Cela contredit le théorème de Cartan-Hadamard pour les surfaces hyperboliques à angles droits. On conclut que les relèvements de γ sont deux à deux disjoints, et donc que γ n'a pas de points doubles.

Si M est compacte, la classe d'homotopie libre de c contient une courbe fermée f de longueur minimum. De nouveau, les modèles locaux montrent que f est une géodésique, elle ne passe par aucun sommet, elle ne rencontre une arête que si elle lui est confondue.

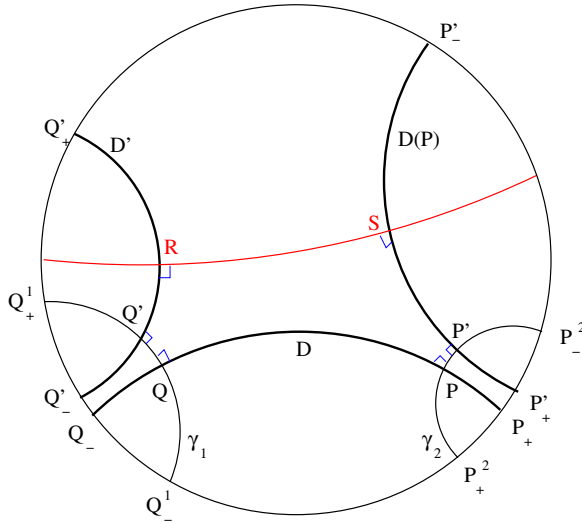
Montrons que f n'a pas de points doubles. Relevons c et f au revêtement universel de M . Chaque relèvement \tilde{f}_i de f est une géodésique doublement infinie qui ne rencontre pas le bord. Il lui correspond deux points à l'infini \tilde{f}_i^\pm du cercle. A \tilde{f}_i correspond un relèvement \tilde{c}_i de c qui a les mêmes extrémités sur le cercle. En effet, l'homotopie dans M entre c et f se relève en une homotopie dans \tilde{M} entre \tilde{c}_i et \tilde{f}_i qui déplace les points d'une distance bornée. Dans la topologie du disque, les deux courbes convergent vers le même point. Comme c n'a pas de points doubles, les relèvements \tilde{c}_i sont deux à deux disjoints, donc la paire $(\tilde{f}_i^-, \tilde{f}_i^+)$ ne sépare pas la paire $(\tilde{f}_j^-, \tilde{f}_j^+)$ des extrémités d'un autre relèvement \tilde{c}_j . Comme dans le cas des arcs, cela entraîne que \tilde{f}_i et \tilde{f}_j ne se coupent pas. On conclut que f est sans points doubles.

Le même argument de non séparation sur le bord montre que deux géodésiques fermées homotopes à des courbes fermées simples disjointes sont disjointes ou confondues. ■

4.3 Hexagones à angles droits

Proposition 4.8 *Soient ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 des réels strictement positifs. Il existe un unique hexagone convexe à angles droits dans le plan hyperbolique tels que les longueurs de trois côtés deux à deux non consécutifs soient ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 .*

Preuve. Soit $D = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ une géodésique, γ_1 un segment géodésique de longueur ℓ_1 partant du point $Q = \gamma(0)$ de D orthogonalement à D , soit D' la géodésique orthogonale à γ_1 partant de son extrémité Q' . Soit $P = \gamma(t)$ un point de D . Notons $\gamma_2(P)$ le segment géodésique de longueur ℓ_2 partant de P orthogonalement à D du même côté que γ_1 , soit $D(P)$ la géodésique orthogonale à γ_2 partant de son extrémité P' . On note $Q_- = \gamma(-\infty)$, $P_+ = \gamma(+\infty)$, Q_-^1 et Q_+^1 (resp. P_-^2 et P_+^2) les points à l'infini de γ_1 (resp. de γ_2), de sorte que Q_-^1 et P_+^2 soient du même côté de D . Enfin, on note Q'_- et Q'_+ (resp. P'_- et P'_+) les points à l'infini de D' (resp. de $D(P)$) de sorte que Q'_- (resp. P'_+) soit du même côté de γ_1 (resp. de γ_2) que Q_- (resp. que P_+).



Lorsque $t \gg 0$, dans le modèle du disque, ces points sont dans l'ordre suivant sur le bord.

$$Q'_-, Q_-, Q_-^1, Q_+^1, Q'_+, P'_-, P_-^2, P'_+, P_+, P_+^2.$$

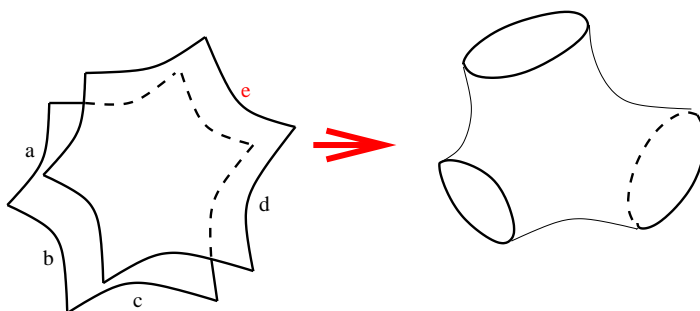
Notons τ la valeur de t pour laquelle $Q'_+ = P'_-$. Notons C le polygone infini $Q'_+Q'QP'P'_-$. Notons $f(t)$ la borne inférieure des longueurs des courbes contenues dans C et reliant les côtés Q'_+Q' et $P'P'_-$. Comme C est convexe, cette borne inférieure est atteinte par un segment géodésique orthogonal à ces côtés. Comme $s < t \Rightarrow C(s) \subset C(t)$, la fonction f est continue et strictement croissante, donc il existe une unique valeur de t telle que $f(t) = \ell_3$. On obtient ainsi un hexagone convexe $RQ'QP'P'S$ à angles droits tel que $Q'Q = \ell_1$, $PP' = \ell_2$ et $SR = \ell_3$.

Tout hexagone convexe à angles droits ayant deux côtés non adjacents ni opposés de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 est isométrique à l'un des $RQ'QP'P'S$. Spécifier la troisième longueur détermine uniquement la position de P donc l'hexagone, à isométrie près. ■

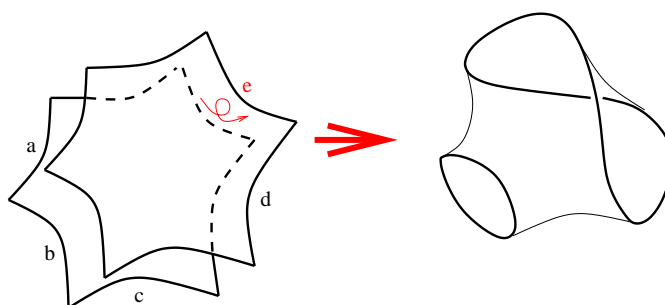
4.4 Pantalons

Définition 4.9 On appelle pantalon (pair of pants) une variété de dimension 2 homéomorphe au complémentaire de deux disques ouverts dans un disque fermé.

Exemple 4.10 Soit H un hexagone convexe à angles droits du plan hyperbolique. Notons a, b, c, d, e, f ses côtés dans l'ordre circulaire. Prenons deux copies H_1 et H_2 de H et identifions a_1 à a_2 , c_1 à c_2 et e_1 à e_2 par l'identité. Le résultat de l'application de la proposition 4.4 est un pantalon hyperbolique à bord géodésique. Remarquer qu'on peut ajuster comme on veut la longueur de chacune des trois composantes du bord.



Remarque 4.11 Reprenons la même construction, mais au lieu d'utiliser l'identité pour identifier les trois paires de côtés, choisissons d'identifier la troisième paire au moyen de l'isométrie de e_1 sur e_2 qui renverse l'orientation. On obtient une surface hyperbolique à bord géodésique dont le bord a deux composantes, homéomorphe à un ruban de Möbius privé d'un disque. Appelons cette surface non orientable et de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à -1 un faux pantalon. De nouveau, on peut ajuster comme on veut les longueurs des deux composantes du bord.



Exercice 4 Soit M un pantalon hyperbolique. Soit $h : \mathbf{R}/\ell\mathbf{Z} \rightarrow \partial M$ une paramétrisation isométrique d'une composante a du bord de M . On identifie les points $h(t)$ et $h(t + \frac{\ell}{2})$ de a . Montrer que l'espace obtenu est un faux pantalon hyperbolique.

Proposition 4.12 Toute variété compacte de dimension 2 de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative admet au moins une métrique riemannienne de courbure -1 .

Preuve.

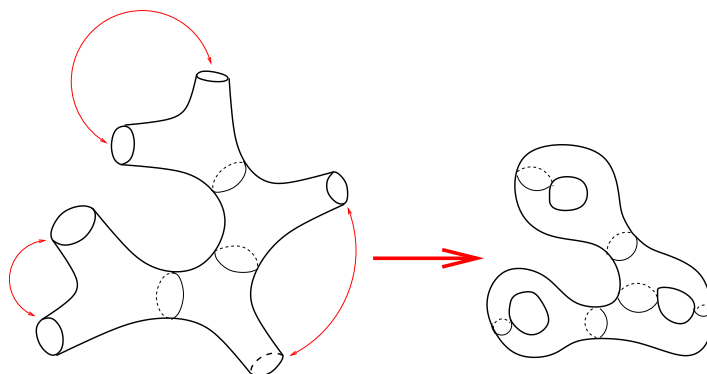
Soient M_1 et M_2 deux surfaces hyperboliques compactes à bord géodésique. Soit ι une isométrie entre certaines composantes du bord de M_1 et certaines composantes du bord de M_2 . Alors

$$\chi(M_1 \cup_{\iota} M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2).$$

En effet, la caractéristique d'Euler-Poincaré est additive, $M_1 \cap M_2 \subset M_1 \cup_{\iota} M_2$ est une réunion disjointe de cercles donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle. De même, en identifiant deux à deux certaines composantes du bord d'une surface hyperbolique compacte à bord géodésique, la caractéristique d'Euler-Poincaré ne change pas.

Si M_1 et M_2 sont orientées, le bord hérite d'une orientation. Si ι est une isométrie entre parties du bord qui renverse l'orientation, alors $M_1 \cup_{\iota} M_2$ est orientable.

La caractéristique d'Euler-Poincaré d'un pantalon vaut -1 . Un arbre de n pantalons recollés par des isométries renversant l'orientation est une surface orientable de caractéristique d'Euler $-n$ dont le bord a $n + 2$ composantes connexes. Si n est pair, on peut recoller deux à deux les composantes du bord en renversant l'orientation, on obtient une surface hyperbolique compacte sans bord orientable de caractéristique d'Euler-Poincaré $-n$. Si on recolle en préservant l'orientation, on obtient une surface hyperbolique compacte sans bord non orientable de caractéristique d'Euler-Poincaré $-n$.



Supposons $n \geq 1$ impair. Recollons à un faux pantalon un arbre de $n - 1$ pantalons. Le bord de la surface obtenue a $n + 1$ composantes. En recollant deux à deux les composantes du bord, on obtient une surface hyperbolique compacte sans bord non orientable de caractéristique d'Euler-Poincaré $-n$. D'après la classification, on a construit au moins une métrique à courbure -1 sur chaque variété compacte sans bord de dimension 2. ■

Exercice 5 *On rappelle que les variétés à bord compactes connexes orientables (resp. non orientables) de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré et le nombre de composantes du bord. Montrer que chacune d'entre elles admet une métrique à courbure constante qui rend le bord géodésique.*

4.5 Une famille de surfaces hyperboliques de genre g

La construction ci-dessus dépend de quantités de paramètres, montrant qu'il y a probablement, même à isométrie près, de grandes familles de métriques à courbure -1 sur chaque variété compacte de dimension 2. On va préciser le décompte des paramètres, en étant d'abord plus formel dans la construction d'une surface à partir d'un arbre de pantalons. Pour ce paragraphe et les suivants, on a utilisé comme source le livre de P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhäuser (1992).

Fixons un point P_1 du plan hyperbolique et un repère orthonormé direct (e_1, e_2) en P_1 . Notons $H(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ l'hexagone à angles droits $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ du plan hyperbolique dont le premier côté P_1P_2 part de P_1 dans la direction de e_1 , le sixième côté P_6P_1 arrive en P_1 dans la direction de $-e_2$, et les côtés 2, 4 et 6 ont pour longueurs respectives $\ell_1/2$, $\ell_2/2$, $\ell_3/2$. Entre deux hexagones, on peut choisir un homéomorphisme préservant l'orientation, envoyant côté sur côté, qui dépend continûment des longueurs ℓ_i .

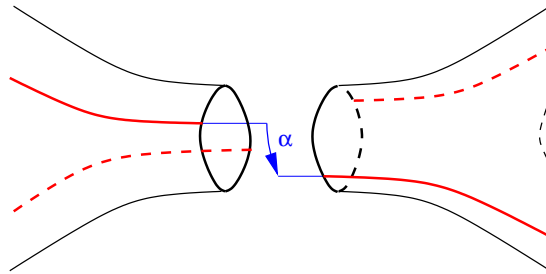
En doublant $H(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ le long des côtés 1, 3 et 5, on obtient un pantalon orienté $P(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ et une paramétrisation à vitesse constante $h_i : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \partial_i P(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ d'origine P_{2i} compatible avec l'orientation induite sur le bord pour chacune des trois composantes du bord de $P(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$.

Soit $g \geq 2$ un entier. Soit G un graphe trivalent à $n = 2g - 2$ sommets, sans boucles. Trivalent signifie que chaque sommet appartient à exactement trois arêtes. Un tel graphe s'obtient par exemple à partir d'un arbre trivalent à n sommets, en fusionnant deux par deux les arêtes menant aux feuilles, en évitant de fusionner deux feuilles issues du même noeud. Pour chaque sommet s , on numérote de 1 à 3 les couples (s, a) où a est une arête contenant s . Ces choix sont faits une fois pour toutes.

Pour chaque arête a de G , on se donne un réel strictement positif $\ell(a)$ et un réel $\alpha(a)$. On note (L, A) la donnée de ces $6g - 6$ nombres.

On construit une surface hyperbolique sans bord $\Sigma_{g,L,A}$ comme suit. Pour chaque sommet s de G , d'où émanent trois arêtes a_1, a_2 et a_3 , notons P^s le pantalon hyperbolique $P(\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3))$. Dans la réunion disjointe des P^s , on identifie deux points $P \in \partial_i P^s$ et $Q \in \partial_j P^{s'}$ si

- s et s' sont les extrémités d'une arête a ;
- le couple (s, a) est numéroté i et le couple (s', a) est numéroté j ;
- il existe $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tel que $h_i(t) = P$ et $h_j(\alpha(a) - t) = Q$.



Entre deux surfaces $\Sigma_{g,L,A}$ et $\Sigma_{g,L',A}$, il y a un homéomorphisme canonique, construit au moyen des homéomorphismes de référence entre hexagones. Entre les surfaces $\Sigma_{g,L,A}$ et $\Sigma_{g,L,A'}$, on construit un homéomorphisme canonique en utilisant les *homéomorphismes de twist* définis ci-dessous. On obtient ainsi un homéomorphisme canonique entre deux surfaces $\Sigma_{g,L,A}$ quelconques.

Lorsqu'on oublie la métrique pour ne raisonner que sur la topologie, on peut donc noter simplement Σ_g une surface de cette famille.

Définition 4.13 *Soit $\chi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse, nulle au voisinage de 1 et qui vaut 1 au voisinage de 0. Soit M un pantalon hyperbolique orienté. Notons ν la normale unitaire rentrante le long de ∂M . Notons $\text{inj}(\nu)$ le rayon d'injectivité normal du bord de M , i.e. le rayon d'injectivité de l'exponentielle normale au bord. Soit c une composante du bord de M , de longueur ℓ . Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. L'homéomorphisme de twist d'angle α associé à c est l'application $M \rightarrow M$ qui, en coordonnées de Fermi*

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times [0, \text{inj}(\nu)[\rightarrow M, \quad (t, r) \mapsto \exp_{c(t)} r\nu(t),$$

s'écrit

$$(t, r) \mapsto (t + \alpha\chi(\frac{r}{\text{inj}(\nu)}), r).$$

Il n'est pas simple de décider si deux surfaces de la famille $\Sigma_{g,L,A}$ sont isométriques ou non. Par exemple, lorsque $\alpha(a)$ est changé en $\alpha(a) + 1$, la surface $\Sigma_{g,L,A}$ est changée en une surface $\Sigma_{g,L,A'}$ qui lui est isométrique. Toutefois, l'homéomorphisme qui réalise cette isométrie n'est pas isotope à l'homéomorphisme canonique (en l'occurrence, un homéomorphisme de twist d'angle 1) entre $\Sigma_{g,L,A}$ et $\Sigma_{g,L,A'}$.

5 Espace de Teichmüller

On va décrire l'espace des métriques riemanniennes à courbure -1 sur une surface compacte sans bord, à isotopie (i.e. homéomorphisme isotope à l'identité) près.

5.1 Isotopie

Définition 5.1 *Soient X et Y des espaces topologiques. Deux homéomorphismes $X \rightarrow Y$ sont dits isotopes (*isotopic*) s'il sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\text{Homeo}(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

Deux homéomorphismes d'une variété compacte qui sont suffisamment proches sont isotopes. L'ensemble des classes d'isotopie d'homéomorphismes est donc discret. Distinguer les métriques hyperboliques à isotopie près plutôt qu'à homéomorphisme près ne change pas la dimension de l'espace des classes d'équivalence. Il se trouve que l'espace quotient ainsi modifié est plus facile à décrire.

5.2 Surfaces marquées

Jusqu'à la fin du chapitre, on fixe, pour chaque entier $n \geq 2$, une variété compacte sans bord orientée de dimension 2, de genre g (i.e. de caractéristique d'Euler-Poincaré $2 - 2g$), notée Σ_g . Par exemple, celle construite au paragraphe précédent.

Définition 5.2 Une surface hyperbolique marquée de genre g (*marked genus g hyperbolic surface*) est la donnée d'une surface hyperbolique compacte sans bord M et d'un homéomorphisme $\phi : \Sigma_g \rightarrow M$.

Deux surfaces hyperboliques marquées M et M' sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme isométrique $f : M \rightarrow M'$ tel que $\phi' \circ f$ et ϕ soient isotopes.

La distance entre deux surfaces hyperboliques marquées M et M' est la borne inférieure des $\epsilon > 0$ tels qu'il existe un homéomorphisme $f : M \rightarrow M'$ tel que $\phi' \circ f$ et ϕ soient isotopes et tel que

$$\text{Lip}(f) < 1 + \epsilon, \quad \text{Lip}(f^{-1}) < 1 + \epsilon.$$

L'espace des classes d'équivalence de surfaces hyperboliques marquées de genre g s'appelle l'espace de Teichmüller (*Teichmüller space*) \mathcal{T}_g .

Exemple 5.3 Chaque surface $\Sigma_{g,L,A}$ vient avec un homéomorphisme $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_{g,L,A}$ donc est une surface hyperbolique marquée de genre g .

Exercice 6 Vérifier que la "distance" naturelle sur les surfaces marquées induit bien une distance sur l'espace de Teichmüller, i.e. si $\text{dist}(M, M') = 0$, alors M et M' sont équivalentes.

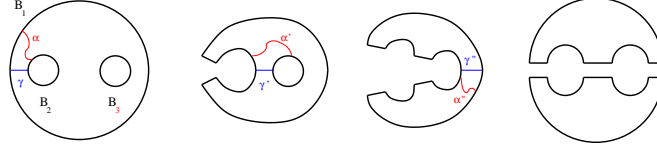
5.3 Espace de Teichmüller du pantalon

On va montrer que toute surface hyperbolique marquée de genre g est équivalente à une unique surface de la famille $\Sigma_{g,L,A}$. On commence par traiter le cas du pantalon.

Lemme 5.4 Tout pantalon hyperbolique marqué s'obtient de manière unique en recollant deux hexagones identiques. En particulier, deux pantalons hyperboliques marqués sont équivalents si et seulement si les longueurs des composantes du bord qui se correspondent à travers le marquage sont égales.

Preuve. Soit $(M, \phi : P \rightarrow M)$ un pantalon hyperbolique marqué à bord géodésique, $B_1 = \phi(\partial_1 P)$, $B_2 = \phi(\partial_2 P)$ et $B_3 = \phi(\partial_3 P)$ les composantes connexes de son bord. Par définition d'un pantalon, il existe un arc simple α_P reliant $\partial_1 P$ à $\partial_2 P$. D'après le lemme 4.7, $\alpha = \phi \circ \alpha_P$ est homotope à un arc simple géodésique γ , orthogonal à B_1 et B_2 , de longueur ℓ . Découpons M le long de γ . On obtient une surface hyperbolique à coins droits M' homéomorphe à un anneau. dont le bord comporte 5 arêtes, 3 sont issues des arêtes B_1 , B_2 et B_3 de M' (on garde la même notation) et deux issues du dédoublement de γ . Dans le pantalon de référence P découpé le long de α_P , il existe un arc simple α'_P reliant $\partial_2 P$ à $\partial_3 P$. On découpe M' le long

d'un arc géodésique simple γ' homotope à $\alpha' = \phi \circ \alpha'_P$, orthogonal à B_2 et B_3 , de longueur ℓ' . On obtient une surface hyperbolique à coins droits M'' homéomorphe à un disque dont le bord comporte 8 arêtes. Enfin, on découpe M'' le long d'un arc géodésique simple γ'' reliant B_3 à B_1 , orthogonal à B_3 et B_1 , de longueur ℓ'' . On obtient deux hexagones à angles droits. Chacun possède des côtés de longueurs ℓ , ℓ' et ℓ'' . Ils sont donc isométriques. On obtient une isométrie de $P(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ sur M qui respecte la numérotation des composantes du bord.



Le fait que cette isométrie est isotope au marquage donné ϕ résulte d'un lemme de topologie (voir Buser, Proposition A.17 page 426) : *deux homéomorphismes ϕ et ϕ' entre pantalons sont isotopes si et seulement si $\phi' \circ \phi^{-1}$ laisse globalement stable chaque composante du bord.* ■

Remarque 5.5 *Les classes d'isométrie de pantalons hyperboliques non marqués sont paramétrées par les suites de réels strictement positifs (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) tels que $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3$.*

En effet, le marquage correspond à numéroter les composantes du bord. En l'absence du marquage, deux pantalons sont isométriques si et seulement si leurs bords sont isométriques, i.e. si et seulement si les longueurs des composantes du bord rangées par ordre croissant sont les mêmes.

5.4 Coordonnées de Fenchel-Nielsen

Théorème 4 *L'application*

$$]0, +\infty[^{3g-3} \times \mathbf{R}^{3g-3} \rightarrow \mathcal{T}_g, \quad (L, A) \mapsto [\Sigma_{g,L,A}]$$

est un homéomorphisme.

Preuve.

Soit M une surface hyperbolique marquée de genre g . Numérotions c_1, \dots, c_{3g-3} les courbes fermées simples dans Σ_g qui proviennent des coutures entre pantalons. Conservons la même notation pour l'image de c_i dans M par le marquage ϕ . Dans la classe d'homotopie libre de c_i , il existe une unique géodésique γ_i , elle est sans points doubles. Comme les c_i sont deux à deux non homotopes, les γ_i sont deux à deux disjointes.

D'après un théorème de Baer (1928) et Zieschang (1970), il existe un homéomorphisme isotope à l'identité envoyant les c_i sur les γ_i . Quitte à troquer le marquage contre un marquage équivalent (isotope), on peut donc supposer que $c_i = \gamma_i$. On note ℓ_i la longueur de c_i .

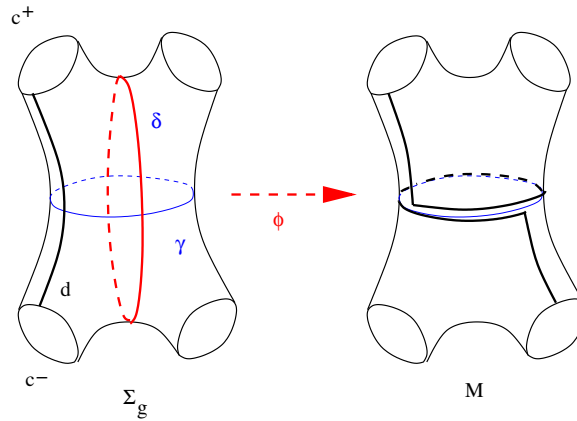
Découpons M suivant ces géodésiques. On obtient des pantalons marqués. D'après le lemme 5.4, chacun d'entre eux est équivalent à un unique $P(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$.

A chaque courbe c_i correspond une surface hyperbolique marquée à bord géodésique notée X_i , la réunion des deux pantalons qui se partagent c_i .

Dans $\Sigma_g = \Sigma_{g,L,0}$, pour chaque courbe c_i , notons δ_i la courbe fermée formée des braguettes des pantalons. Choisissons une fois pour toute une orientation de c_i ainsi qu'une paire de composantes c_i^+ et c_i^- du bord de X_i qui ne sont pas séparées par δ_i . Notons d la classe d'homotopie d'un arc simple dans X_i reliant c_i^- à c_i^+ . La classe ϕ_*d dans M contient une unique courbe formée

- d'un arc minimisant de c_i^- à c_i (c'est une couture de premier pantalon),
- d'un arc géodésique contenu dans c_i (faisant éventuellement plus d'un tour),
- d'un arc minimisant de c_i à c_i^+ (c'est une couture du second pantalon).

On note β_i la longueur algébrique de l'arc géodésique contenu dans c_i , et $\alpha_i = \beta_i/\ell_i$. L'autre choix de paire (c_i^+, c_i^-) conduirait à la même valeur.



Notons L le vecteur des longueurs des courbes γ_i et A celui des angles de twist α_i . Alors M est équivalente à $\Sigma_{g,L,A}$.

Inversement, si deux surfaces marquées sont équivalentes, l'isométrie compatible avec les marquages envoie les c_i de l'une sur les c_i de l'autre, donc préserve les longueurs de ces géodésiques, mais elle préserve aussi la construction qui permet d'extraire les angles de twists. Par conséquent, les deux surfaces marquées ont mêmes vecteurs L et A . ■

Remarque 5.6 *Le problème de décrire l'ensemble des classes d'isométrie de surfaces hyperboliques non marquées se ramène à décrire un domaine fondamental pour l'action sur l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g du groupe discret des classes d'isotopie d'homéomorphismes de Σ_g .*