Le théorème de Jordan
topologiquement

Hugues Lerebours Pigeonnière

2 juin 2008

Table des matières

1 Le théorème de Jordan **2**
1.1 Courbes de Jordan 2
1.2 Théorème de Jordan 2
1.3 Camille Jordan 2

2 Présentation du document **3**
2.1 Idée générale au plus haut niveau 3
2.1.1 Aperçu de la preuve 3
2.1.2 Lemme de la frontière des composantes 4
2.2 Schéma de la démonstration topologique 4
2.3 Bibliographie 5

3 Prolongements en espaces métriques **6**
3.1 Normalité – Corollaire du théorème d'Urysohn 6
3.1.1 Normalité 6
3.1.2 Théorème d'Urysohn 6
3.1.3 Distance 6
3.1.4 Propriété des espaces métriques 7
3.2 Continuité – Théorème de prolongement de Tietze 8
3.2.1 Parenthèse sur une propriété de la continuité 8
3.2.2 Théorème de prolongement de Tietze 8
3.3 Théorème de prolongement de Borsuk 11
3.3.1 Homotopie 11
3.3.2 Théorème de prolongement de Borsuk 11

4 Connexité dans le plan **13**
4.1 Critère d'Eilenberg 13
4.1.1 Connexité 13
4.1.2 Lemme de la composante non bornée 13
4.1.3 Critère d'Eilenberg 14
4.2 Théorèmes non abordés – notion de logarithme continu 15
4.2.1 Logarithme continu 15
4.2.2 Théorème de Brouwer 15
4.2.3 Théorème de Janiszewski 15

Chapitre 1

Le théorème de Jordan

1.1 Courbes de Jordan

Définition : *Soit ε^2 un plan (affine réel de dimension 2). On appelle* courbes de Jordan *dans ε^2 l'image d'une application continue et injective du cercle trigonométrique S^1 dans ε^2, c'est-à-dire l'ensemble*

$$C = \{\varphi(z); z \in S^1\}$$

où $\varphi : S^1 \longrightarrow \varepsilon^2$ est une application continue et injective. On dit alors que φ est une paramétrisation *de la courbe de Jordan C, ou encore que φ est une* courbe de Jordan paramétrée *dans ε^2.*

1.2 Théorème de Jordan

Théorème : *Soit C une courbe de Jordan dans un plan ε^2. Le complémentaire $\varepsilon^2 \setminus C$ de C dans ε^2 a exactement deux composantes connexes, toutes deux ouvertes, dont une seule est non bornée. Chacune de ces composantes connexes a pour frontière la courbe C. La composante connexe non bornée de $\varepsilon^2 \setminus C$, notée $\mathrm{Ext}(C)$, est appelée* partie de ε^2 extérieure *à la courbe C, ou (avec un léger abus de langage)* extérieur *de C. La composante connexe bornée de $\varepsilon^2 \setminus C$, notée $\mathrm{Int}(C)$, est appelée* partie de ε^2 *intérieure à la courbe C, ou* intérieur *de C.*

1.3 Camille Jordan

Marie Ennemond Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon (Rhône) et mort le 22 janvier 1922, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.
Il est né à Lyon et étudia à l'École polytechnique (Promotion 1855). Il fut ingénieur au corps des mines puis plus tard, enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.
Aujourd'hui on associe son nom à un certain nombre de résultats fondamentaux :

- le théorème de Jordan et la courbe de Jordan à laquelle ce théorème se réfère ;
- la forme normale de Jordan et la réduction de Jordan (parfois confondue avec les travaux de Wilhelm Jordan 1842- 1899 à qui l'on doit la méthode du pivot ou d'élimination de Gauss-Jordan) ;
- le théorème de Jordan-Hölder, qui est un résultat fondamental sur les groupes finis et les séries de compositions.

Camille Jordan a contribué à faire entrer la théorie de Galois dans le courant de pensée majoritaire. Il investigua aussi les groupes de Mathieu, premiers exemples de groupes sporadiques.
En 1919, il devient membre étranger de la Royal Society.

Chapitre 2

Présentation du document

2.1 Idée générale au plus haut niveau

2.1.1 Aperçu de la preuve

La démonstration se fait en plusieurs étapes, selon tout ce qui est énoncé dans le théorème. Nous aborderons les différents points successivement.

$\varepsilon^2 \setminus C$ a exactement une composante connexe non bornée
La démonstration de ce lemme (4.1.2) est détaillée dans le corps du projet, pour son utilité dans le critère d'Eilenberg.

$\varepsilon^2 \setminus C$ a exactement deux composantes connexes
D'abord deux cas possibles :

1. La courbe contient un segment de droite.
2. La courbe ne contient pas de segment de droite.
   Dans ce cas, on tend une corde dans un arc convexe de la courbe. On sépare ainsi la courbe de Jordan en deux courbes fermées possédant chacune un segment de droite, qui est leur frontière commune. On se ramène alors au cas précédant, moyennant ensuite l'étude des composantes connexes des deux courbes, en prenant leurs union et intersection, pour trouver le connexe intérieur à la courbe initiale (contenant les points ajoutés du segment), et le connexe extérieur non borné.

On étudie donc le cas où la courbe contient un segment de droite s, ouvert :
- Dans un voisinage V d'un point du segment s tel que $V \cap C \subset s$, le complémentaire du segment a exactement deux composantes connexes, qu'on appellera V_1 et V_2. Or, une courbe de Jordan est la frontière de chacune des composantes connexes de son complémentaire (lemme 2.1.2). Donc $\varepsilon^2 \setminus C$ possède au plus deux composantes connexes.
- Si on en retire un petit segment du segment, le voisinage n'est plus séparé.

Si on considère f la frontière du voisinage V du point considéré, $C \cup f$ sépare V_1 et V_2 (i.e. sépare tous x et y tels que $(x, y) \in V_1 x V_2$). Et $(C \setminus s) \cup f$ ne sépare pas V_1 et V_2.

Le théorème de Janiszewski (4.2.3) affirme que si dans un espace topologique on a deux compacts, deux points distincts et hors de ces compacts, que chacun des compacts ne sépare pas les deux points, et que l'intersection des compacts est connexe, alors leur union ne sépare pas ces points.

Par conséquent, si le compact C ne séparait pas V_1 et V_2, de même que le compact $(C \setminus s) \cup f$, puisque $C \cap ((C \setminus s) \cup f) = C \setminus s$ est connexe, $C \cup ((C \setminus s) \cup f) = C \cup f$ ne séparerait pas V_1 et V_2. Contradiction. Donc il y a au moins deux composantes connexes de $\varepsilon^2 \setminus C$.

Finalement, on a montré que $\varepsilon^2 \setminus C$ possède exactement deux composantes connexes, dont l'une exactement est non bornée, donc l'autre bornée. (c.q.f.d.)

2.1.2 Lemme de la frontière des composantes

Lemme : *Une courbe de Jordan C dans un plan ε^2 est la frontière de chaque composante connexe de $\varepsilon^2 \setminus C$.*

Démonstration : Soit U une composante connexe de $\varepsilon^2 \setminus C$. U est un ouvert et sa frontière ∂U est contenue dans C. Supposons maintenant qu'il existe $z \in C$ non adhérent à U. z est adhérent à $\varepsilon^2 \setminus C$. Comme il n'est pas adhérent à U, il est adhérent à $V = (\varepsilon^2 \setminus C) \setminus U$. Nous remarquons que V est ouvert (c'est la réunion des composantes connexes de $\varepsilon^2 \setminus C$ autres que U), non vide (puisque le point z lui est adhérent) vérifiant $V \cap \overline{U} = \emptyset$ (car $\partial U \subset C$).

Nous pouvons écrire : $\varepsilon^2 \setminus \partial U = U \cup (\varepsilon^2 \setminus \overline{U})$. Or, U et $\varepsilon^2 \setminus \overline{U}$ sont des ouverts disjoints non vides (le premier est non vide par hypothèse, le second car il contient V). L'égalité prouve donc que $\varepsilon^2 \setminus \partial U$ est un ouvert non connexe de ε^2, c'est-à-dire que ∂U sépare ε^2. Puisque ∂U est fermé, contenu dans le compact C et supposé non égal à C, ∂U était trivialement supposé ne pas séparer ε^2 ($\varepsilon^2 \setminus \partial U = (\varepsilon^2 \setminus C) \cup (C \setminus \partial U)$, et $z \in C \setminus \partial U$ adhérent à $\varepsilon^2 \setminus C$). Donc on a montré par cette contradiction que $\partial U = C$.

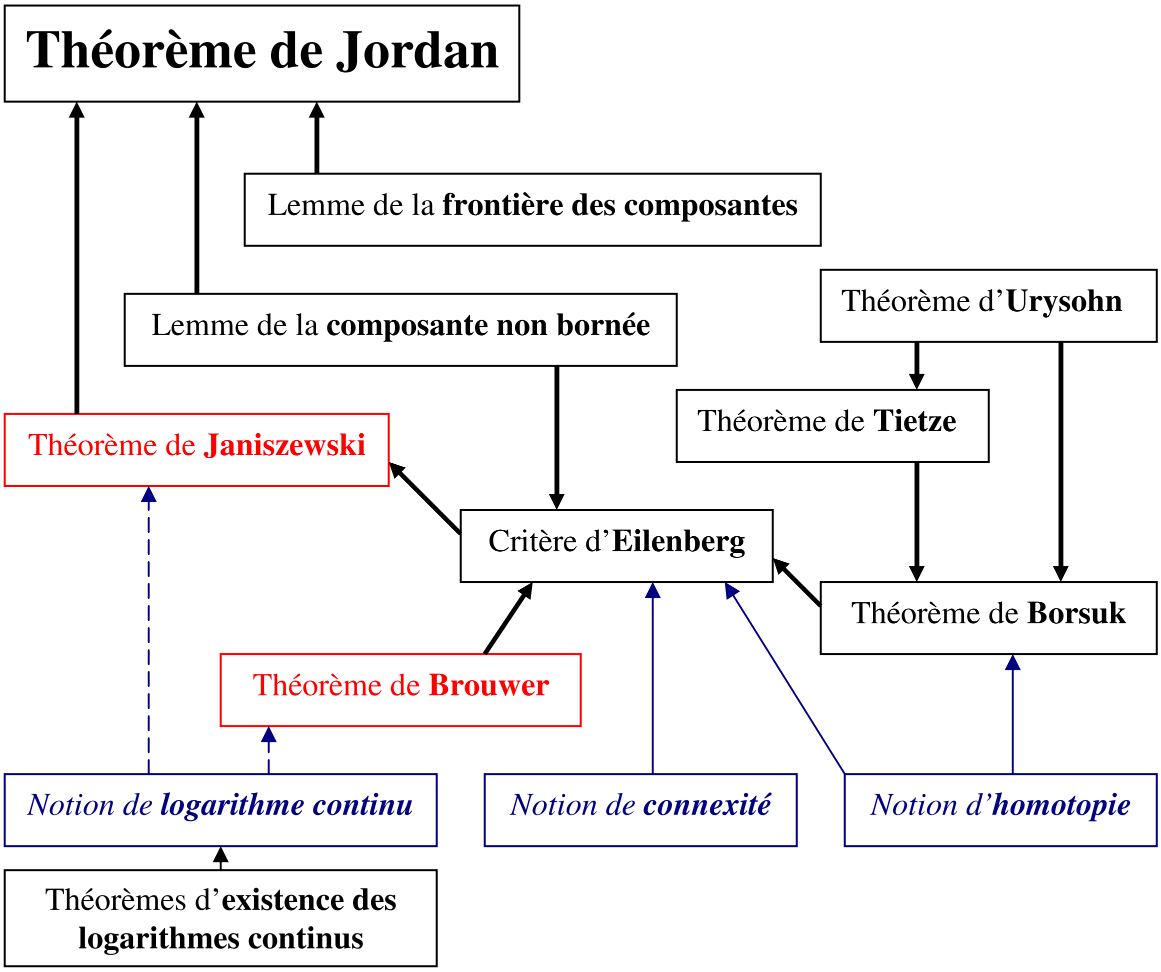
Finalement C est l'exacte frontière de chacune des composantes connexes de $\varepsilon^2 \setminus C$. (c.q.f.d.)

2.2 Schéma de la démonstration topologique

Nous avons énoncé le théorème de Jordan, relatif aux courbes du même nom, et en avons présenté l'idée générale d'une démonstration qui fait intervenir le théorème de Janiszewski (4.2.3), qui lui même en appelle beaucoup d'autres en cascades. Nous allons donc aborder successivement toutes ces grandes vérités topologiques fondamentales, concernant essentiellement les prolongements et la connexité.

Nous nous arrêterons lorsque devrait être impliquée la notion de logarithme continu (4.2.1), pour en rester à la topologie et avec le moins possible d'analyse, le théorème de Jordan n'étant dans ce projet qu'un prétexte à poser quelques incontournables de la topologie. Et ces quelques pages n'ont pour seul but que d'avancer un peu plus avant dans cette belle matière dont nous, auteur des présentes, n'avons eu qu'une formation d'initiation.

Voici un schéma de la preuve, et la mise en évidence des théorèmes qui, pourtant nécessaires à la démonstration, ne seront pas abordés pour raison de notion impliquée :



2.3 Bibliographie

MARLE, Charles-Michel. *Systèmes dynamiques – une introduction. Cours et exercices corrigés. Mathématiques 2ème cycle.* Ellipses. Juin 2003.

QUEFFELEC, Hervé. *Topologie. Cours et exercices corrigés. 2ème cycle, CAPES, Agrégation. 2ème édition.* Dunod. Octobre 2002.

WIKIPEDIA. (Page consultée le 29 avril 2008). *Connexité par arcs*, [En ligne]. Adresse URL : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Connexit%C3%A9_par_arcs

Chapitre 3

Prolongements en espaces métriques

3.1 Normalité – Corollaire du théorème d'Urysohn

3.1.1 Normalité

Définition : *Un espace topologique X est dit* normal *si pour tout couple (F_0, F_1) de parties fermées non vides disjointes de X, il existe un voisinage U_0 de F_0 et un voisinage U_1 de F_1 disjoints.*

3.1.2 Théorème d'Urysohn

Uniquement à titre d'indication, parce que c'est un des grands théorèmes qu'utilise la démonstration du théorème de Jordan, nous énonçons le théorème d'Urysohn, qui nous fournit des propriétés intéressantes des espaces métriques, entre autres. En fait, nous allons restreindre l'étude sans utiliser – ni démontrer par conséquent – ce théorème :

Théorème : *Un espace topologique X est normal si et seulement si pour tout couple (F_0, F_1) de parties fermées non vides disjointes de X, il existe une fonction continue f, définie sur X et à valeurs dans $[0;1]$, qui prend en tout point de F_0 la valeur 0 et en tout point de F_1 la valeur 1.*

3.1.3 Distance

Avant d'aborder une propriété des espaces métriques, arrêtons-nous sur la définition de la distance, spécialement de la distance d'un point à un espace, et démontrons pour la suite le lemme suivant :

Lemme : *Dans un espace métrique (X, d), la distance d_A à un sous-espace non vide A de X est une fonction de X dans $\mathbb{R}$ 1_lipschitzienne – i.e. $\forall\ x, y \in X,\ |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ – et vérifiant $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.*

Démonstration : (X, d) est un espace métrique, c'est-à-dire qu'à l'espace X est associée une fonction $d : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} d(x,y) = d(y,x),\ \forall\ x,y \in X \\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),\ \forall\ x,y,z \in X \end{cases}$$

Remarque : On peut en déduire (en remplaçant z par x) : $\forall\ x, y \in X,\ d(x,y) \geq 0$.

A est une partie non vide de X, et $d_A(x) = \inf\{d(x,a),\ a \in A\}$.
$(\forall\ x, y \in X,)\ \forall\ a \in A,\ d_A(x) - d(x,y) \leq d(x,a) - d(x,y) \leq d(y,a)$
En passant à la borne inférieure, on obtient $d_A(x) - d(x,y) \leq d_A(y)$.
Donc, comme $d(x,y) = d(y,x)$, $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$. (c.q.f.d.)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}_A(x) = 0 & \Leftrightarrow & \inf\{d(x,a),\ a \in A\} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in A,\ \lim\limits_{n\to\infty} d(x,a_n) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in A,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \\ & \Leftrightarrow & x \in \overline{A} \text{ (définition de l'adhérence } \overline{A} \text{ de } A) \end{array} \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

Remarque : Donc si $A \neq \emptyset$ et A fermé (i.e. $A = \overline{A}$), alors $x \notin A \Rightarrow d_A(x) > 0$.

3.1.4 Propriété des espaces métriques

Nous formulons donc la seule propriété, **corollaire du théorème d'Urysohn**, que nous voulons utiliser, en la démontrant directement :

Propriété : *Tout espace métrique* (X, d) *est normal et pour tout couple* (F_0, F_1) *de parties fermées non vides disjointes de* X*, il existe une fonction continue* f*, définie sur* X *et à valeurs dans* $[0; 1]$*, qui prend en tout point de* F_0 *la valeur* 0 *et en tout point de* F_1 *la valeur* 1.

Démonstration : (X, d) est un espace métrique.
Pour tout couple (F_0, F_1) de parties fermées non vides disjointes de X, soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\ x \in X,\ f(x) = \frac{d_{F_0}(x)}{d_{F_0}(x) + d_{F_1}(x)}.$$

Puisque d_{F_0} et d_{F_1} sont 1_lipschitziennes, elles sont continues sur X.
De plus, $d_{F_0}(x) + d_{F_1}(x) = 0 \Rightarrow d_{F_0}(x) = d_{F_1}(x) = 0$ (car $d_{F_0}(x) \geq 0$ et $d_{F_1}(x) \geq 0$) $\Rightarrow x \in F_0$ et $x \in F_1$. Contradiction : $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.
Finalement, f est continue sur X.

De plus, on a : $\forall\ A \subset X,\ A \neq \emptyset,\ d_A(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$
Enfin on vérifie que : $\left\{ \begin{array}{l} x \in F_0 \Rightarrow d_{F_0}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ x \in F_1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_{F_1}(x) = 0 \\ d_{F_0}(x) \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow f(x) = 1 \end{array} \right.$
On a démontré que la fonction f énoncée dans la propriété existe. (c.q.f.d.)

Si on pose alors $U_0 = f^{-1}(]-\infty; \frac{1}{2}[)$ et $U_1 = f^{-1}(]\frac{1}{2}; +\infty[)$, U_0 et U_1 sont des ouverts de X et voisinages respectifs de F_0 et F_1.
(Cela est évident si l'on considère la définition de f, mais on voit juste après la preuve de ce que l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert – s'il en est besoin ici – qui sera très utile par la suite.)
On a montré que X est normal. (c.q.f.d.)

3.2 Continuité – Théorème de prolongement de Tietze

3.2.1 Parenthèse sur une propriété de la continuité

Nous allons d'abord formuler ici la **proposition sur les images réciproques**, car passer outre sa démonstration, même si on préfère souvent l'admettre, serait assez peu consciencieux.

Proposition : *L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert ; l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue est un fermé.*

Démonstration : Soit f une fonction continue de X dans Y (deux espaces métriques), ω un ouvert de Y.
$x_0 \in f^{-1}(\omega)$. ω est un voisinage de $f(x_0)$, donc il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(V) \subset \omega$, donc $V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(\omega)$.
Ce qui signifie que $f^{-1}(\omega)$ contient un voisinage de x_0, pour tout $x_0 \in f^{-1}(\omega)$. $f^{-1}(\omega)$ est donc ouvert de X. (c.q.f.d.)
$x \in f^{-1}(\omega^c) \Leftrightarrow f(x) \notin \omega \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(\omega))^c$.
Donc, $f^{-1}(\omega^c) = (f^{-1}(\omega))^c$.

On en déduit que l'image réciproque de tout fermé est le complémentaire de l'image réciproque d'un ouvert. Donc l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue est un fermé. (c.q.f.d.)

3.2.2 Théorème de prolongement de Tietze

Voici donc le **théorème de prolongement de Tietze**, restreint à l'étude des espaces métriques :

Théorème : *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie fermée non vide de X.*

1. *Toute fonction continue $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction continue $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur l'espace X entier ; si de plus f est bornée en module sur A, et si M est un réel strictement positif tel que pour tout $a \in A$, on ait l'inégalité stricte $|f(a)| < M$ (resp. large), on peut imposer à F d'être bornée en module sur X et de vérifier, pour tout $x \in X$, l'inégalité stricte $|F(x)| < M$ (resp. large).*

2. *Soit un entier $n \geq 1$. Toute application continue $\varphi : A \longrightarrow S^n$, à valeurs dans la sphère S^n, se prolonge en une application continue $\Phi : U \longrightarrow S^n$, définie sur un ouvert U de X contenant A.*

Démonstration : Soit (X, d) un espace métrique, A une partie fermée non vide de X et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. On sépare les cas où f serait bornée ou non bornée.
   (a) f est bornée en module sur A par $M > 0$:

      i. S'il existe α, $|\alpha| = 1$, tel que $f^{-1}(\{\alpha\frac{M}{3}\}) = \emptyset$,
         – Si $f^{-1}([-M; -\frac{M}{3}]) \neq \emptyset$, on a $f^{-1}([+\frac{M}{3}; +M]) = \emptyset$ (sinon la continuité de f – avec le théorème des valeurs intermédiaires – apporterait une contradiction). On pose alors $\theta = -\frac{M}{3}$.
         – Si $f^{-1}([-M; -\frac{M}{3}]) = \emptyset$, on pose $\theta = +\frac{M}{3}$.
         Ainsi, $\sup_{x \in A} |f(x) - \theta| \leq \dfrac{2M}{3}$ (dans ces deux cas).
         On pose h_0 la fonction constante de X qui prend pour valeur θ.

ii. Si $f^{-1}(\{-\frac{M}{3}\}) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(\{+\frac{M}{3}\}) \neq \emptyset$:
L'ensemble $\left]-\infty; -\frac{M}{3}\right]$ étant fermé dans $\mathbb{R}$, $A_- = f^{-1}(\left]-\infty; -\frac{M}{3}\right])$ est fermé dans A ;
L'ensemble $\left[+\frac{M}{3}; +\infty\right[$ étant fermé dans $\mathbb{R}$, $A_+ = f^{-1}(\left[+\frac{M}{3}; +\infty\right[)$ est fermé dans A ;
A_- et A_+ sont tous deux non vides, car $-\frac{M}{3} \in f(A)$ et $+\frac{M}{3} \in f(A)$, et A étant fermé dans X, A_- et A_+ sont fermés dans X.
$x \in A_+ \cap A_- \Leftrightarrow +\frac{M}{3} \leq f(x) \leq -\frac{M}{3}$. Contradiction ($M > 0$).
Donc A_+ et A_- sont deux fermés non vides distincts de X.

D'après le corollaire du théorème d'Urysohn (3.1.4), il existe une fonction g_0 continue sur X à valeurs dans $[0; 1]$, prenant la valeur 0 sur A_- et la valeur 1 sur A_+.
Posons $h_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in X,\ h_0(x) = (2g_0(x) - 1)\frac{M}{3}$.
En utilisant $\forall\, x \in A,\ |f(x)| \leq M$ (le sens large suffit), on a :
h_0 est continue et a valeurs dans $[-\frac{M}{3}; +\frac{M}{3}]$ avec :

$$\begin{cases} \forall\, x \in A_-,\ h_0(x) = -\frac{M}{3} \text{ (et } -M \leq f(x) \leq -\frac{M}{3}\text{) ;} \\ \forall\, x \in A_+,\ h_0(x) = +\frac{M}{3} \text{ (et } +\frac{M}{3} \leq f(x) \leq +M\text{).} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{x \in A_-} |f(x) - h_0(x)| \\ \sup\limits_{x \in A_+} |f(x) - h_0(x)| \end{array}\right\} \leq M - \frac{M}{3} = \frac{2M}{3}.$$

$\forall\, x \in A \setminus (A_- \cup A_+),\ |f(x)| < \dfrac{M}{3}$ et $|h_0(x)| \leq \dfrac{M}{3}$.
Donc, $\sup\limits_{x \in A} |f(x) - h_0(x)| \leq \dfrac{2M}{3}$.

On a trouvé une fonction $h_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :
$\sup\limits_{x \in A} |f(x) - h_0(x)| \leq \dfrac{2}{3}M$ et $\sup\limits_{x \in X} |h_0(x)| \leq \dfrac{1}{3}M$.

$f - h_0$ étant continue sur A et bornée largement (et on n'a utilisé que le sens large dans le raisonnement précédent), il existe de la même façon une fonction h_1, puis une suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $h_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, continues bornées sur X, construites itérativement à partir de h_0, telles que :

$$\left| \begin{array}{l} \sup\limits_{x \in A} |(f(x) - h_0(x)) - h_1(x)| \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}M\right) \\ \vdots \\ \sup\limits_{x \in A} \left| f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} h_n(x) \right| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{N+1} M \\ \vdots \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \sup\limits_{x \in X} |h_1(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}M\right) \\ \vdots \\ \sup\limits_{x \in X} |h_N(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{N} M \\ \vdots \end{array}$$

On a $\|h_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n M$ et $\sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ converge.
Donc la série H de terme général h_n converge normalement, et chaque h_n étant continue sur X, H est continue sur X. On a de plus :

$$\forall\, x \in X,\ |H(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|h_n\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n M = M$$

Donc H est aussi bornée sur X par M.

En outre, comme $\lim_{N\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} M\right)=0$, $\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in A}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N} h_n(x)\right|\right)=0$.
Donc la suite $S_N=\sum_{n=0}^{N} h_n$ converge uniformément vers f sur A. Et $\lim_{N\to\infty} S_N=H$.
Donc H est un prolongement continu borné de f sur X.

- Comme on n'a, dans cette démonstration, utilisé que la condition $\forall\ x\in A,\ |f(x)|\leq M$ (au sens large), on a bien trouvé dans ce cas $F=H$ continue bornée par M telle que H soit un prolongement de f sur X. (c.q.f.d.)

- Si $\forall\ x\in A,\ |f(x)|<M$, alors considérons l'ensemble $B=\{x\in X,\ |H(x)|=M\}$.
  B est une partie fermée de X (comme image réciproque du fermé {M} par la fonction continue $|H|$), et disjointe du fermé A, car $\forall\ x\in A,\ |H(x)|=|f(x)|<M$.

  Si B est vide, $F=H$ est un prolongement de f continu et borné strictement par M sur X. Si B est non vide, d'après le corollaire du théorème d'Urysohn (3.1.4), il existe une fonction ψ continue sur X à valeurs dans $[0;1]$, prenant la valeur 0 sur B et la valeur 1 sur A. On obtient bien sûr le prolongement $F=H\psi$ de f, continu et borné strictement par M sur X (en effet, $\{x\in X,\ |H(x)\psi(x)|=M\}=\emptyset$). (c.q.f.d.)

(b) f est non bornée en module sur A :
Posons $\eta:\mathbb{R}\longrightarrow]-1;1[$ telle que $\eta(x)=\frac{x}{1+|x|}$. η étant continue, $\iota=\eta\circ f:A\longrightarrow]-1;1[$ est continue et strictement bornée. Elle se prolonge donc en une fonction $\widetilde{\iota}:X\longrightarrow]-1;1[$, selon la démonstration que l'on vient d'élaborer pour les fonctions bornées.

$$
\begin{aligned}
\forall\ y\in]-1;1[,\ x=\tfrac{y}{1-|y|} &\Leftrightarrow\ x-|y|x=y\\
&\Leftrightarrow\ x=|x(1-|y|)|\,x+y\\
&\Leftrightarrow\ x=|x|(1-|y|)\tfrac{y}{1-|y|}+y\\
&\Leftrightarrow\ x=|x|y+y\\
&\Leftrightarrow\ y=\tfrac{x}{1+|x|}
\end{aligned}
$$

Donc η a une bijection continue sur $]-1;1[$.
Sur A, on a donc $f=\eta^{-1}\circ(\eta\circ f)=\eta^{-1}\circ\iota$, et sur X, $F=\eta^{-1}\circ\widetilde{\iota}$ est définie et continue.
Il existe donc un prolongement continu F de f sur X. (c.q.f.d.)

2. Soit un entier $n\geq 1$ et $\varphi:A\longrightarrow S^n$ une application continue.
Rappelons que S^n est la n-sphère euclidienne unitaire, c'est-à-dire la surface de dimension n dont tous les points sont à distance unitaire de l'origine du corps $\mathbb{R}^{n+1}$ dans lequel elle est plongée.
Ce qui signifie : $\exists\ \varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1}\in C(A\longrightarrow\mathbb{R})$, $\varphi:x\longmapsto(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n+1}(x))$, et :

$$\forall\ x\in A,\ \sum_{i=1}^{n+1}(\varphi_i(x))^2=1$$

On a donc $\forall\ x\in A,\ \forall\ i\in\lfloor 1;n+1\rfloor,\ |\varphi_i(x)|\leq 1$.
D'après la première partie – démontrée ci-dessus – du théorème de prolongement de Tietze, chaque fonction φ_i ($i\in\lfloor 1;n+1\rfloor$), est prolongeable en une fonction continue ϕ_i sur X, à valeurs dans $[-1;1]$.

Posons $U = \left\{ x \in X,\ \sum_{i=1}^{n+1} (\phi_i(x))^2 \neq 0 \right\}$, l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. U est un ouvert de X, et $A \subset U$. On peut définir alors les fonctions de U dans $\mathbb{R}$:

$$\Phi_i : x \longmapsto \frac{\phi_i(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\phi_i(x))^2}}$$

On remarque que, tous les ϕ_i étant continus, chaque Φ_i est continu, et on a :

$$\forall\ x \in A,\ \Phi_i(x) = \phi_i(x) = \varphi_i(x)$$

$$\forall\ x \in U,\ \sum_{i=1}^{n+1} (\Phi_i(x))^2 = 1$$

Donc l'application continue $\Phi : U \longrightarrow S^n$ qui à x associe $(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n+1}(x))$ est un prolongement continu de φ dans l'ouvert U, à valeurs dans S^n.
On a montré qu'un prolongement à valeurs dans S^n de φ existe sur un ouvert contenant A. (c.q.f.d.)

3.3 Théorème de prolongement de Borsuk

3.3.1 Homotopie

Nous voyons maintenant la notion d'homotopie des applications continues dans des espaces métriques, qui sera utilisée dans les prochains théorèmes.

Définition : *Soient X et Y deux espaces métriques, $f_0 : X \longrightarrow Y$ et $f_1 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f_0 et f_1 sont* homotopes *s'il existe une application continue $g : X \times [0;1] \longrightarrow Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait $g(x,0) = f_0(x)$ et $g(x,1) = f_1(x)$.*
Toute application continue $g : X \times [0;1] \longrightarrow Y$ vérifiant ces propriétés est appelée homotopie *de f_0 à f_1.*

3.3.2 Théorème de prolongement de Borsuk

Un théorème sur l'homotopie des prolongements :

Théorème : *Soient (X,d) un espace métrique, A une partie fermée non vide de X, n un entier strictement positif, f_0 et f_1 deux applications continues définies sur A et à valeurs dans la sphère S^n. On suppose que f_0 et f_1 sont homotopes et que f_0 se prolonge en une application continue $F_0 : X \longrightarrow S^n$. Alors f_1 se prolonge en une application continue $F_1 : X \longrightarrow S^n$, qu'on peut choisir homotope à F_0.*

Démonstration : Mêmes hypothèses que dans l'énoncé du théorème, et définissons :
$\varphi : A \times [0;1] \longrightarrow S^n$ une homotopie de f_0 à f_1,
$\phi : (X \times \{0\}) \cup (A \times [0;1]) \longrightarrow S^n$ telle que : $\begin{array}{l} \phi(x,0) = F_0(x), x \in X \\ \phi(a,t) = \varphi(a,t), a \in A, t \in [0;1] \end{array}$
Ces deux égalités définissent la même fonction ϕ car $\varphi(a,0) = F_0(a)$ pour tout $a \in A \subset X$.

L'application ϕ dans S^n est donc définie et continue sur une partie fermée de $X \times [0;1]$. D'après le théorème de prolongement de Tietze (3.2.2.2), elle se prolonge en une application $\widetilde{\phi}$ à valeurs dans S^n, sur un ouvert W de $X \times [0;1]$ contenant $(X \times \{0\}) \cup (A \times [0;1])$.

Si $\exists\ x_0 \in X$ avec $\{x_0\} \times [0;1] \subset W$, tel que :
$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ x_1 \in X,\ d(x_0, x_1) < \lambda,\ \exists\ t_1 \in [0;1],\ (x_1, t_1) \notin W$.
Alors (x_0, t_1) appartient à W ($\{x_0\} \times [0;1] \subset W$) et ne possède pas de voisinage dans W. Ce qui est contradictoire avec le fait que W est ouvert.
Au contraire donc, $\forall\ x_0 \in X$ avec $\{x_0\} \times [0;1] \subset W$,
$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ x_1 \in X,\ d(x_0, x_1) < \lambda,\ \forall\ t_1 \in [0;1],\ (x_1, t_1) \in W$ (i.e. $\{x_1\} \times [0;1] \subset W$).
Posons $V = \{x \in X, \{x\} \times [0;1] \subset W\}$. On a montré que tout $x \in V$ possède un voisinage dans V.
V est donc ouvert dans X.

Or, W contient $(X \times \{0\}) \cup (A \times [0;1])$ et en particulier $A \times [0;1]$. Donc $A \subset V$. On a donc A et $X \setminus V$ deux parties fermées distinctes de X. Le corollaire du théorème d'Urysohn (3.1.4) dit alors qu'il existe une fonction continue $\chi : X \longrightarrow [0;1]$ qui prend les valeurs 1 sur A et 0 sur $X \setminus V$.
$\forall\ x \in X,\ t \in [0;1]$, on a $\chi(x)t \in [0;1]$, et :

1. si $x \in V$, $(x, \chi(x)t) \in (V \times [0;1]) \subset W$;
2. si $x \notin V$, $\chi(x) = 0$ donc $(x, \chi(x)t) \in (X \times \{0\}) \subset W$.

On définit alors $\Phi : X \times [0;1] \longrightarrow S^n$ telle que $\Phi(x,t) = \widetilde{\phi}(x, \chi(x)t)$. Φ est bien sûr continue, et à valeurs dans S^n. De plus, $\Phi(x,0) = \widetilde{\phi}(x,0) = \phi(x,0) = F_0(x)$. Et si on pose $F_1(x) = \Phi(x,1) = \widetilde{\phi}(x, \chi(x))$, $\forall\ a \in A,\ F_1(a) = \widetilde{\phi}(a,1) = \phi(a,1) = \varphi(a,1) = f_1(a)$.
F_1 est finalement un prolongement de f_1 sur X et Φ est une homotopie de F_0 à F_1. On a montré que f_1 se prolonge en une application continue sur X, homotope à F_0. (c.q.f.d.)

Chapitre 4

Connexité dans le plan

4.1 Critère d'Eilenberg

4.1.1 Connexité

Définition du chemin : *Si E est un espace topologique et si x et y sont deux points de E, on appelle* chemin d'origine x et d'extrémité y *toute application continue $\gamma : [0;1] \longrightarrow E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Si une telle application existe, on dit que x et y sont reliés.*
Il est clair que ceci est une relation d'équivalence. Pour la transitivité, si γ_1 relie x à y et γ_2 relie y à z, γ relie x à z avec $\gamma(t) = \gamma_1(2t)$ sur $[0;1/2]$ et $\gamma(t) = \gamma_2(2t-1)$ sur $[1/2;1]$.

Définition de la connexité par arcs : *Une partie A d'un espace topologique E est dite* connexe par arcs *si et seulement si tout couple de points de A est relié par un chemin.*

Il existe également la notion plus générale de connexité, que nous ne définirons pas. Il est simplement utile de savoir que tout connexe par arcs est connexe. On peut en revanche noter la définition de la composante connexe.

Définition de la composante connexe : *La composante connexe de X contenant x, parfois notée C_x, est le plus grand connexe inclus dans X et contenant x.*

Il en découle immédiatement que l'intersection de deux composantes connexes distinctes est vide et que l'union de deux composantes connexes distinctes n'est pas connexe.

Nous nous placerons désormais toujours dans un plan ε^2, i.e. un espace affine réel de dimension 2, afin d'entrer dans les hypothèses du théorème de Jordan. Dans ce contexte, nous parlerons de connexité, mais la connexité par arcs suffit et permet alors de prouver la connexité. Plus simplement, il est préférable de toujours comprendre *connexe par arcs* lorsqu'il est écrit *connexe*.

4.1.2 Lemme de la composante non bornée

Ce lemme a évidemment un intérêt direct pour le théorème de Jordan, qui affirme que le complémentaire d'une courbe de Jordan possède une unique composante connexe non bornée. Nous l'abordons ici pour son utilité dans la démonstration du critère qui va suivre.

Lemme : *Soit K une partie compacte non vide d'un plan ε^2. Alors $\varepsilon^2 \setminus K$ a une et une seule composante connexe non bornée.*

Démonstration : Comme K est compacte, il existe une boule fermée B de ε^2 qui contient K. $\varepsilon^2 \setminus B$ est un ouvert non borné et connexe (par arcs, comme dans tout ce qui suit)[1] de ε^2, contenu dans $\varepsilon^2 \setminus K$, qui rencontre toute partie non bornée de ε^2. Il existe donc au moins une composante connexe non bornée de $\varepsilon^2 \setminus K$, celle qui contient l'ouvert connexe $\varepsilon^2 \setminus B$.
S'il existait deux composantes connexes non bornées distinctes de $\varepsilon^2 \setminus K$, toutes deux rencontreraient $\varepsilon^2 \setminus B$. Comme $\varepsilon^2 \setminus B$ est connexe, ces deux connexes contiendraient $\varepsilon^2 \setminus B$, donc d'intersection non vide. Finalement, leur réunion serait connexe (tout point de l'un est relié à tout point de l'intersection, qui est relié à tout point de l'autre). Contradiction avec la définition de composante connexe.
Il existe donc exactement une composante connexe non bornée de $\varepsilon^2 \setminus K$. (c.q.f.d.)

4.1.3 Critère d'Eilenberg

Théorème : *Soient K une partie compacte non vide d'un plan ε^2 et x, y deux points distincts de $\varepsilon^2 \setminus K$. Munissons ε^2 d'une structure euclidienne et posons, pour tout $z \in K$,*

$$\beta_x(z) = \frac{z-x}{\|z-x\|}, \quad \beta_y(z) = \frac{z-y}{\|z-y\|}.$$

La partie K de ε^2 sépare les points x et y si et seulement si les applications β_x et β_y, définies sur K et à valeurs dans S^1 (identifié à l'ensemble des éléments de norme 1 du plan vectoriel euclidien E^2 associé à ε^2) ne sont pas homotopes.

Démonstration :

1. Supposons que K ne sépare pas x et y. Cela revient à dire qu'il existe dans $\varepsilon^2 \setminus K$ un chemin reliant x et y, i.e. il existe un arc paramétré $\gamma : [0;1] \longrightarrow \varepsilon^2 \setminus K$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On a donc l'homotopie de β_x à β_y : $(z,t) \longmapsto \frac{z-\gamma(t)}{\|z-\gamma(t)\|}$.
2. Supposons que K sépare x et y, i.e. il n'existe pas de chemin les reliant dans $\varepsilon^2 \setminus K$.
$\varepsilon^2 \setminus K$ possède une et une seule composante connexe non bornée, d'après le lemme vu précédemment (4.1.2). Au moins un des deux points x et y appartient donc à une composante connexe bornée U de $\varepsilon^2 \setminus K$ (sinon ils seraient reliés). Admettons, si besoin en intervertissant x et y, que x appartient à U.
Comme $\varepsilon^2 \setminus K$ est ouvert et union de toutes ses composantes connexes distinctes, ces composantes sont ouvertes, en particulier U. Donc la frontière de U ne rencontre ni U ni aucune des composantes connexes de $\varepsilon^2 \setminus K$. Donc elle est incluse dans K. Donc $X = K \cup U = K \cup \overline{U}$ est une partie fermée et bornée, donc compacte, de ε^2.
Or, $y \notin K \cup U$, donc on peut prolonger β_y en $\widetilde{\beta_y}$ telle que pour tout $z \in X$:
$$\widetilde{\beta_y}(z) = \frac{z-y}{\|z-y\|}$$
Si β_x et β_y sont homotopes, le théorème de prolongement de Borsuk (3.3.2) affirme que β_x est prolongeable par une application continue $\widetilde{\beta_x}$ de X dans S^1. Si on prolonge maintenant $\widetilde{\beta_x}$ à ε^2 par l'application $\widehat{\beta_x}$:
$$\widehat{\beta_x}(z) = \begin{cases} \frac{z-x}{\|z-x\|} & \text{si } z \in \varepsilon^2 \setminus U \\ \widetilde{\beta_x}(z) & \text{si } z \in \overline{U} \end{cases}$$
$\widehat{\beta_x}$ est continue car, la frontière de U étant incluse dans K, la double définition de l'application y est cohérente. Et sur $K \setminus U \subset \varepsilon^2 \setminus U$, la définition correspond aussi à sa restriction.

[1] Il est aisé de démontrer ces propriétés élémentaires du complémentaire d'une boule fermée, notamment sa connexité, d'après la connexité par arcs du plan ε^2 : en dehors d'une boule, tout couple de point est trivialement relié dans le plan.

Soit alors R un réel suffisamment grand pour que le compact X soit contenu dans le disque fermé de centre x de rayon R. Et pour tout z de ce disque, posons :

$$h(z) = x + R\widetilde{\beta_x}(z)$$

On voit bien que h applique le disque fermé de centre x et de rayon R dans sa frontière, et que sa restriction à cette frontière (lorsque $\|z - x\| = R$) est l'application identité.
L'existence de cette application contredit le théorème de Brouwer (4.2.2), qui affirme qu'il n'existe pas d'application continue d'un disque vers sa frontière telle que sa restriction à la frontière soit l'identité.
Nous supposions β_x et β_y homotopes, et nous sommes arrivés à une contradiction. On a donc prouvé que β_x et β_y ne sont pas homotopes. (c.q.f.d.)

4.2 Théorèmes non abordés – notion de logarithme continu

4.2.1 Logarithme continu

Cette section présente, pour seules information, clarté et précision, les théorèmes – déjà cités dans le texte – qui permettraient d'achever la preuve du théorème de Jordan, mais qui font intervenir une nouvelle notion, celle de logarithme continu, que nous ne souhaitons pas traiter dans ce projet :

Définition : *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue ; on dit que f admet un* logarithme continu *s'il existe $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $f(x) = e^{g(x)}$ pour tout $x \in X$; en abrégé, on écrit $f = e^g$ et on dit que f a un* log continu.

4.2.2 Théorème de Brouwer

Définition : *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. A s'appelle un* retract *de X si l'identité $i : A \longrightarrow A$ se prolonge en un application continue $r : X \longrightarrow A$; r s'appelle une* rétractation *de X sur A.*

Théorème : *Soit B une boule euclidienne fermée du plan. Alors ∂B, sa frontière, n'est pas un retract de B.*

4.2.3 Théorème de Janiszewski

Théorème : *Soient A, B des compacts du plan et $p, q \notin A \cup B$. Si ni A ni B ne séparent p et q et que $A \cap B$ est connexe, alors $A \cup B$ ne sépare pas p et q.*