

**Contrôle continu de mathématiques n° 1**

11 octobre 2004, durée 30mn

1. En utilisant un déterminant, dire pour quelles valeurs de  $a$  l'application linéaire  $f_a : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  de matrice  $\begin{pmatrix} 2a & -a & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 3 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$  est-elle bijective ?

2. On pose  $\Delta_a = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 2 & 1-a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

- a. Calculer  $\Delta_0$ .

- b. Trouver la ou les erreurs dans le calcul suivant.

$$\begin{aligned} \Delta_a &= \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 2 & 1-a & a \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 2 & 1-a & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a+1) \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2 & 1-a & 1-2a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & 1-2a \end{vmatrix} = (a+1)a(1-2a). \end{aligned}$$

3. En utilisant un déterminant, écrire une équation du plan de  $\mathbf{R}^3$  engendré par les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$ .

**Contrôle continu de mathématiques n° 1 - Réponses**

**1.** On calcule le déterminant de  $f_a$ . On ajoute 2 fois la 2ème colonne à la première, puis on développe suivant la première ligne.

$$\begin{vmatrix} 2a & -a & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 3 & 2a & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 3+4a & 2a & a^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a \\ 3+4a & a^2 \end{vmatrix} = a^2(-3-3a).$$

$f_a$  est bijective si et seulement si son déterminant est non nul, i.e. si et seulement si  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ .

**2.** On trouve  $\Delta_0 = 1$ , ce qui indique que le calcul qui suit est faux. La première égalité est fausse. En effet, l'opération effectuée remplace la 3ème ligne  $L_3$  par  $aL_3 - L_1$ , ce qui n'est pas une opération élémentaire. La seconde égalité est correcte : un facteur commun à tous les coefficients d'une ligne peut sortir du déterminant. La troisième égalité est fausse. En effet, l'opération effectuée remplace la 3ème colonne  $C_3$  par  $C_2 - C_3$ , ce qui n'est pas une opération élémentaire. La quatrième égalité est fausse. En effet, on développe suivant la dernière ligne, mais sans appliquer le bon signe. La dernière égalité est correcte.

**3.** Pour obtenir une équation du plan engendré par  $v_1$  et  $v_2$ , il suffit de développer suivant la dernière colonne le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2a & -a & x \\ -1 & 1 & y \\ 3 & 2a & z \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2a \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2a & -a \\ 3 & 2a \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2a & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = (-3-2a)x + (-3a-4a^2)y + az = 0.$$