

**Contrôle continu de mathématiques n° 2**

25 octobre 2004, durée 30mn

**1.** Soit  $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  une application différentiable. On suppose que pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , la norme au carré  $\|F(x, y)\|^2$  vaut 1. Montrer que la matrice jacobienne de  $F$  n'est pas inversible.

**2.** Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction définie sur  $\mathbf{R}^2$  par  $f(x, y) = 3 \cos(x + y) - x^2 + \frac{1}{2}y^2$ . La fonction  $f$  admet-elle un maximum local en  $(0, 0)$  ?

**3.** Quelle est la nature du point singulier en  $t = 0$  de la courbe paramétrée définie par  $c(t) = ((t + 1)^2 - \sin(2t), 1 - t^2)$  ? La courbe admet-elle en ce point une tangente ? Une demi-tangente ? Dessiner sommairement l'aspect de la courbe au voisinage du point singulier.

## Corrigé du contrôle continu de mathématiques n° 2

1. Posons  $g(x, y) = x^2 + y^2$ . Alors  $J_g$  est la matrice ligne  $J_g = (2x \ 2y)$ . Par hypothèse,  $g \circ F = 1$ . Par conséquent,  $J_g J_F = J_{g \circ F} = 0$ . Si  $J_F$  était inversible, on pourrait multiplier à droite par  $(J_F)^{-1}$  et conclure que  $J_g = 0$ . Or on calcule  $J_g$  en  $F$  qui est de norme 1, donc  $J_g \neq 0$ , contradiction. On conclut que  $J_F$  n'est pas inversible.

2. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3 \sin(x + y) - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3 \sin(x + y) + y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -3 \cos(x + y) - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 \cos(x + y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -3 \cos(x + y) + 1.$$

En  $(0, 0)$ , on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -5, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -2.$$

Le développement limité de Taylor-Young donne

$$f(x, y) = 3 + \frac{1}{2}(-5x^2 - 6xy - 2y^2) + (x^2 + y^2)\epsilon(x, y).$$

Le discriminant vaut  $-4 < 0$ , donc le terme quadratique est toujours strictement négatif. On conclut que  $f$  atteint un maximum local en  $(0, 0)$ .

3. Le développement limité

$$c(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^2 - \frac{4}{3}t^3 + t^3\epsilon(t) \\ 1 - t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3\epsilon(t)$$

montre qu'il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce. La courbe possède une demi-tangente de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

