

Contrôle continu de mathématiques n° 3
22 novembre 2004, durée 30mn

1. Soit C la surface cônica paramétrée par $(u, v) \mapsto s(u, v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ v \end{pmatrix}$ pour $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [-1, 1]$. Calculer son aire.

2. Soit w le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par $w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y^2 \\ (z+1)^2 \end{pmatrix}$. Sans le calculer, déterminer le signe du flux de w à travers le disque unité du plan $\{z=0\}$ orienté par $(0, 0, 1)$.

3. Soit w le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par $w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ (z+1)^2 \\ -y^2 \end{pmatrix}$. Que vaut sa divergence ? En déduire le flux de w à travers la sphère unité orientée par la normale sortante.

Corrigé du contrôle continu de mathématiques n° 3

22 novembre 2004, durée 30mn

1. On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \begin{pmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix},$$

,

$$\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ -v \end{pmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} \right\| = |v|\sqrt{2},$$

d'où

$$\text{aire}(C) = \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} |v|\sqrt{2} \, du \, dv = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 |v| \, dv = \pi\sqrt{2} \int_0^1 v \, dv = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2. En chaque point du disque, le vecteur w pointe vers le haut. Son produit scalaire avec la normale $(0, 0, 1)$ est strictement positif (il vaut 1), donc le flux est strictement positif.

3. On calcule $\text{div}(w) = 2x$. Or l'intégrale de x sur la boule unité B vaut 0, par symétrie ou par le théorème de Fubini,

$$\iiint_B x \, dx \, dy \, dz = \int_{y^2+z^2 < 1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x \, dx \right) dy \, dz = \int_{y^2+z^2 < 1} 0 \, dy \, dz = 0.$$

D'après le théorème d'Ostrogradsky, le flux de w à travers la sphère est égal à l'intégrale de la divergence, donc il est nul.