

Contrôle continu de mathématiques n° 4
6 décembre 2004, durée 30mn

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la matrice $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c'est la matrice associée à une permutation circulaire). Vérifier que $M^3 = I$. M est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

3. Calculer les puissances de la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé du contrôle continu de mathématiques n° 4
6 décembre 2004, durée 30mn

1. Comme A_a est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Si $a \neq 2$, il y a deux valeurs propres distinctes a et 2 , donc A_a est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Si $a = 2$, il y a une valeur propre double. L'espace propre E_2 est la droite d'équation $y = 0$, elle est de dimension 1, alors que la multiplicité vaut 2. Par conséquent, A_2 n'est pas diagonalisable. L'ensemble des valeurs de a telles que A_a soit diagonalisable (sur $\mathbf{R}$) est

2. En itérant 3 fois une permutation circulaire, on obtient l'identité. Donc $M^3 = I$. On peut aussi faire le calcul direct. Autrement dit, $Q(M) = 0$ où Q est le polynôme $Q(x) = x^3 - 1$. Sur $\mathbf{C}$, Q est scindé et ses racines sont simples, donc M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Si M était diagonalisable sur $\mathbf{R}$, ses valeurs propres seraient des racines réelles de Q , donc elles seraient égales à 1. Autrement dit, 1 serait valeur propre triple. Une telle matrice n'est diagonalisable que si elle est diagonale, ce qui n'est pas le cas de M . On conclut que M n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

3. On écrit $A_2 = 2I + B$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on applique la formule du binôme

$$A_2^k = 2^k I + k2^{k-1}B = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$