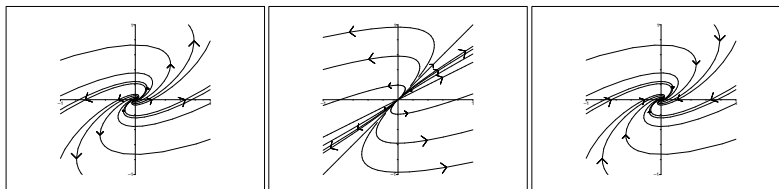


**Contrôle continu de mathématiques n° 5**  
4 janvier 2005, durée 30mn

1. Convertir l'équation différentielle du second ordre  $x'' - 2x' + x = e^t$  en un système de deux équations du premier ordre.

2. Auquel des portraits suivants correspond le système différentiel  $\begin{cases} x' = -2x + 2y \\ y' = -x \end{cases}$  ?



(a)

(b)

(c)

3. Ecrire la solution générale du système différentiel  $\begin{cases} x' = -2x + 2y \\ y' = -x \end{cases}$ .

**Corrigé du contrôle continu de mathématiques n° 4**

4 janvier 2005, durée 30mn

1. On pose  $y = x'$ . Cela conduit au système  $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x + 2y \end{cases}$

2. La matrice du système est  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Son polynôme caractéristique vaut  $P_A(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 = (x + 1 + i)(x + 1 - i)$ . Les racines sont non réelles, non imaginaires. Leur partie réelle  $-1$  est strictement négative, le système est un foyer attractif, ce qui correspond à la figure (c). En effet, (a) est un foyer répulsif et (b) un noeud non dégénéré.

3. L'espace propre  $E_{-1-i}$ , défini par le système  $\begin{cases} -2x + 2y &= (-1 - i)x \\ -x &= (-1 - i)y \end{cases}$ , est la droite d'équation  $-x + (1 + i)y = 0$ , de vecteur directeur  $v = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 \end{pmatrix}$ . L'espace propre  $E_{-1+i}$  est la droite de vecteur directeur  $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$ . La solution générale du système différentiel s'écrit

$$t \mapsto X(t) = c_1 e^{(-1-i)t} v + c_2 e^{(-1+i)t} \bar{v} = \begin{pmatrix} c_1 e^{(-1-i)t} (1 + i) + c_2 e^{(-1+i)t} (1 - i) \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix},$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes complexes.