

DETERMINANTS

P. Pansu

November 1, 2004

1 Motivation

Lorsqu'on résoud le système linéaire de deux équations à deux inconnues le plus général $AX = B$, on trouve une condition nécessaire et suffisante pour qu'il ait une solution unique, c'est que $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, on trouve des formules pour les composantes de X , et donc pour la matrice inverse A^{-1} .

2 Déterminant d'une matrice 2×2

Définition, définition du déterminant de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$. Bilinéarité, antisymétrie.

Aire algébrique des parallélogrammes plans : elle est aussi bilinéaire et antisymétrique, donc coïncide avec le déterminant.

Une transformation linéaire multiplie toutes les aires par un même nombre, la valeur absolue de son déterminant. Formule $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. Preuve algébrique basée sur la notion de forme bilinéaire alternée.

Orientation.

3 Déterminant d'une matrice $n \times n$

Définition par récurrence, utilisant le développement suivant une ligne. Cofacteurs, table des signes $-1)^{i+j}$.

Règles de calcul : développement suivant une colonne, opérations élémentaires, multilinéarité, antisymétrie, déterminant de la transposée.

Formes multilinéaires alternées, formule $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de base. $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible. Comatrice. Formule pour A^{-1} , formules de Cramer.

Déterminant et volume. Produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$. Aire des parallélogrammes dans l'espace. Orientation.

Equation d'un hyperplan. Condition d'indépendance linéaire pour $n - 1$ vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Mineurs, caractérisation du rang par les mineurs non nuls.

Formule développée : permutations, matrice de permutation, signature (=déterminant de la matrice de permutation).

Polynôme caractéristique, trace, invariance par changement de base.