

DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°1
à rendre avant le 15 octobre

I

1. Montrer successivement que les déterminants suivants sont des entiers divisibles par 100, sans les calculer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 100 \\ 3 & 5 & 200 \\ 8 & 2 & 300 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 101 \\ 3 & 5 & 203 \\ 8 & 2 & 308 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 161 \\ 3 & 5 & 253 \\ 8 & 2 & 328 \end{vmatrix}.$$

2. Sachant que les nombres 1067, 1455, 582, 9700 sont divisibles par 97, montrer, sans le calculer, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 2 \\ 9 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est un entier divisible par 97.

II

Soit a un réel.

1. Calculer

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

On exprimera le résultat comme somme de puissances croissantes de a .

2. En développant convenablement le déterminant

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix},$$

trouver une relation entre D_4 , D_3 et D_2 . Calculer D_4 en exprimant le résultat comme somme de puissances croissantes de a .

3. Pour tout $n \geq 5$, on définit de façon analogue D_n , le déterminant de la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont 0 sauf ceux de la diagonale principale qui valent $1+a^2$ et ceux des deux diagonales voisines qui valent a .

- 3.a. Conjecturer la valeur de D_n .

- 3.b. S'inspirer de la question 2 pour établir une relation entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} , pour tout $n \geq 4$.

- 3.c. Démontrer par récurrence la conjecture faite en 3.a.