

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°1
à rendre avant le 3 octobre

I

Soit a un paramètre réel. Soient $v_1 = (2, 1 + a, 2)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (a, a, a^2)$, $v_4 = (1, a, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

1. Déterminer, en fonction de a , le rang de la famille $v_1, \dots, v_4$.
2. Extraire de la famille $v_1, \dots, v_4$ une base du sous espace $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_4)$ engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_4$.
3. Lorsque $a = 0$, puis lorsque $a = 1$, donner des équations de E .
4. Soit $L : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y + az + t \\ (1 + a)x + y + az + at \\ 2x + y + a^2z + t \end{pmatrix}.$$

Déterminer la dimension du noyau de L et en donner une base.

5. On suppose a distinct de 0 et de 1. Trouver des réels non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$.

II

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de la forme $x \mapsto P(x) \cos x + Q(x) \sin x$ où P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

1. Vérifier que les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbf{R}$ par

$$e_1(x) = x \cos x, \quad e_2(x) = \cos x, \quad e_3(x) = x \sin x \quad \text{et} \quad e_4(x) = \sin x$$

constituent une base de E .

2. Soit $f : E \rightarrow E$ l'application qui à une fonction associe sa dérivée. Calculer la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) .
3. Montrer que f est injective. En déduire que l'espace E contient une fonction u_1 dont la dérivée est e_1 .
4. Calculer u_1 .

CORRIGÉ DU DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°1

I

1. Soit $v = (x', y', z')$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$. Le rang de la famille $v_1, \dots, v_4$ est égal au rang du système

$$\begin{cases} 2x + y + az + t &= x' \\ (1+a)x + y + az + at &= y' \\ 2x + y + a^2z + t &= z' \end{cases}.$$

On l'échelonne en choisissant comme premier pivot le coefficient de y dans la première équation. Il vient

$$\begin{cases} y + t + az + 2x &= x' \\ (a-1)t + (a-1)x &= -x' + y' \\ (-a + a^2)z &= -x' + z' \end{cases}.$$

Si $a = 0$, le système obtenu est échelonné de rang 2. Si $a = 1$, il est échelonné de rang 1. Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, il est échelonné de rang 3. On conclut que le rang de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) vaut 2 si $a = 0$, 1 si $a = 1$, et 3 sinon.

2. Si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, le système est échelonné de rang 3 avec inconnues principales y, t et z . Si on impose $x = 0$, on trouve une solution unique. Cela signifie que (v_2, v_4, v_3) est une base de E . Si $a = 0$, le système est échelonné de rang 2 avec inconnues principales y et t . Dans ce cas, (v_2, v_4) est une base de E . Si $a = 1$, le système est échelonné de rang 1 avec inconnue principale y . Dans ce cas, v_2 est une base de E .

3. D'après la question 1, si $a = 0$, E est de dimension 2, il est défini par une seule équation, la condition de compatibilité du système, soit $-x' + z' = 0$. Si $a = 1$, E est de dimension 2, il est défini par deux équations, les conditions de compatibilité du système, soit $-x' + z' = 0$ et $-x' + y' = 0$.

4. Le rang de L est égal à celui du système, soit 3 si $a \neq 0, 1$, 2 si $a = 0$ et 1 si $a = 1$. La dimension du noyau vaut donc 1 si $a \neq 0, 1$, 2 si $a = 0$ et 3 si $a = 1$. Le noyau étant l'ensemble des solutions du système homogène, on en trouve une base comme suit.

Si $a \neq 0, 1$, on impose $x = 1$ et on résout le système obtenu, soit

$$\begin{cases} y + t + az + 2 &= 0 \\ (a-1)t + (a-1) &= 0 \\ (a-a^2)z &= 0 \end{cases}.$$

On trouve une solution unique $w = (1, -1, 0, -1)$. Le noyau de L est donc la droite vectorielle engendrée par w .

Si $a = 0$, on impose successivement $z = 1, x = 0$ et $z = 0, x = 1$. Dans le premier cas, on obtient

$$\begin{cases} y + t &= 0 \\ -t &= 0 \end{cases},$$

qui possède la solution unique $w_1 = (0, 0, 1, 0)$. Dans le second cas, on obtient

$$\begin{cases} y + t + 2 &= 0 \\ -t - 1 &= 0 \end{cases},$$

qui possède la solution unique $w_2 = (1, -1, 0, -1)$. On conclut que (w_1, w_2) est une base du noyau de L .

Si $a = 1$, on impose successivement $t = 1$, $z = x = 0$, puis $z = 1$, $t = x = 0$ et enfin $x = 1$, $t = z = 0$. On obtient les 3 vecteurs $u_1 = (0, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, -1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, -2, 0, 0)$. On conclut que (u_1, u_2, u_3) est une base du noyau de L .

5. On remarque que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ si et seulement si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ est dans le noyau de L . D'après 4, il suffit de prendre $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = -1$.

II

1. Soit $u \in E$. Alors il existe des polynômes P et Q tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u(x) = P(x) \cos x + Q(x) \sin x$. Si $P(x) = \lambda_1 x + \lambda_2$ et $Q(x) = \lambda_3 x + \lambda_4$, alors $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$. Par conséquent (e_1, e_2, e_3, e_4) engendre E .

Supposons que la fonction $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = P(x) \cos x + Q(x) \sin x$ est identiquement nulle. Alors le polynôme P s'annule en tous les multiples de π . Il est donc identiquement nul. De même, le polynôme Q s'annule en tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, donc il est identiquement nul. Par conséquent, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. On conclut que e_1, e_2, e_3 et e_4 sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E .

2. On calcule

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \cos x - x \sin x = e_2 - e_3, \\ f(e_2) &= -\sin x = -e_4, \\ f(e_3) &= \sin x + x \cos x = e_4 + e_1, \\ f(e_4) &= \cos x = e_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Il suffit de calculer le noyau de f . Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} z &= 0 \\ x + t &= 0 \\ -x &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases}.$$

On trouve que la seule solution est $x = y = z = t = 0$. Par conséquent, le noyau $\ker f$ est réduit à $\{0\}$, et f est injective.

D'après le théorème noyau-image, f est aussi surjective, donc il existe $u_1 \in E$ telle que $f(u_1) = e_1$, autrement dit, la dérivée de la fonction u_1 est e_1 .

4. Il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} z &= 1 \\ x + t &= 0 \\ -x &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases}.$$

Or celui-ci possède l'unique solution $(0, 1, 1, 0)$. On conclut que $u_1 = e_2 + e_3$. Autrement dit, $u_1(x) = \cos x + x \sin x$, qui est bien une primitive de $x \cos x$.