

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°2
à rendre avant le 24 octobre

I

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & yx & zx \\ xy & x^2 + z^2 & zy \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det M$ et $\det N$, et vérifier que $\det M = (\det N)^2$.

Ne pouvait-on pas le prévoir?

II

Pour le calcul du déterminant de la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \text{ on introduit } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix},$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, dont on rappelle qu'il vérifie $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

- a.** Calculer X^2 , vérifier que c'est une matrice monômiale, c'est à dire avec un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, en déduire la valeur de $(\det X)^2$.
- b.** Montrer que la matrice $XM(a, b, c)X$ est diagonale, et calculer son déterminant.
- c.** En déduire que $\det M(a, b, c) = -(a + b + c)(a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc)$.

III

Pour le calcul du déterminant de la matrice

$$M(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix}, \text{ on introduit } Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

- a.** Calculer Y^2 , vérifier que c'est une matrice monômiale, c'est à dire avec un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, en déduire la valeur de $(\det Y)^2$.
- b.** Montrer que la matrice $YM(a, b, c, d)Y$ est diagonale, et calculer son déterminant.
- c.** En déduire que $\det M(a, b, c, d) = -(a + b + c + d)(a + ib - c - id)(a - b + c - d)(a - ib - c + id)$.