

Devoir n°2

A rendre avant le 29 octobre

1. Soit f l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (y, \|y\| - x)$, et soient A et B les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$, etc.

1.1. Rappeler le théorème de dérivation des fonctions composées, dans le cas des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1.2. Calculer A^3 et B^3 .

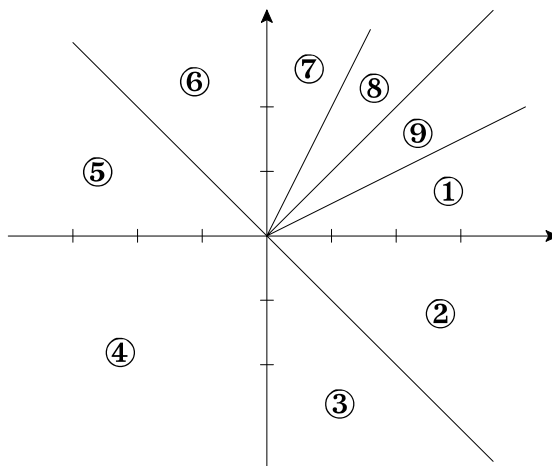
1.3. Calculer $f(1, 0), f^2(1, 0), f^3(1, 0), \dots, f^9(1, 0)$.

Les demi-droites d'origine 0 contenant les neuf images successives de $(1, 0)$ par les itérées de f découpent le plan en neuf secteurs angulaires, indiquées sur la figure ci-contre. On admettra que l'image par f d'une zone est une autre zone, selon le diagramme suivant

$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{7} \rightarrow \textcircled{9} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{6} \rightarrow \textcircled{8} \rightarrow \textcircled{1}$.

1.4. En utilisant tout ce qui précède, déterminer sur chacune des neuf zones les différentielles de f, f^2, f^3, f^6 et f^9 . On regroupera les résultats dans un tableau

1.5. Conclure.



2. Soient f, g, h et k les courbes paramétrées $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t + 2 \cos t - 1 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin^3 t - 3 \sin t \end{pmatrix},$$

$$h(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ 1 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t + \cos t \\ \sin t + \cos t \sin t \end{pmatrix}.$$

Voici, dans le désordre quatre figures représentant ces quatre courbes.

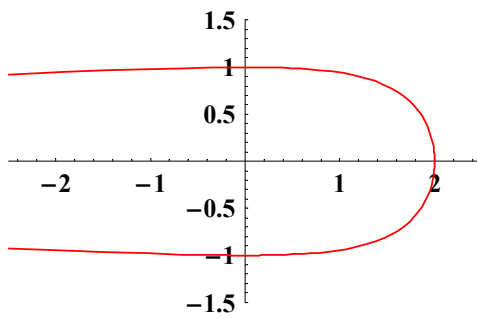


Figure A

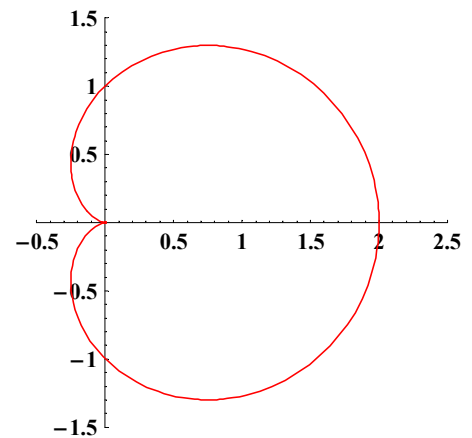


Figure B

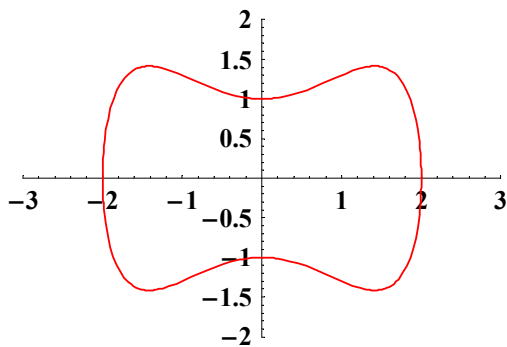


Figure C

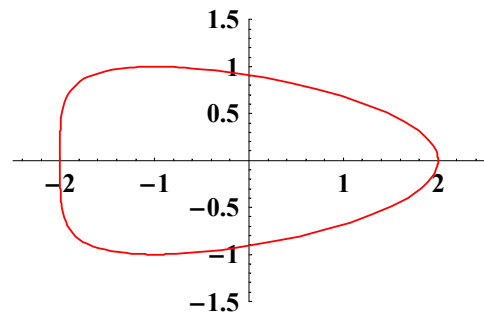


Figure D

- 2.1. Sans calculs, retrouver par des arguments aussi simples que possible à quelle courbe chaque figure correspond.
- 2.2. Dans la suite, on s'intéresse seulement à f . Soit w le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $w(x, y) = (y, 2y^2)$. Calculer la circulation de w le long de f . Le champ w dérive-t-il d'un potentiel ?



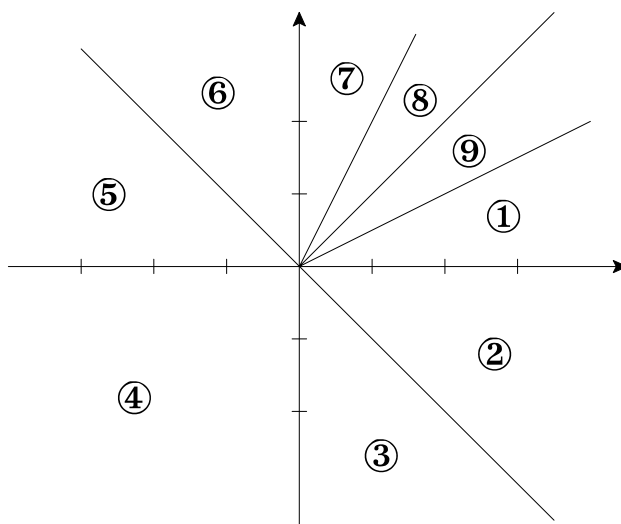
Corrigé du devoir n°2

1. Les différentielles des fonctions composées se calculent par le produit des matrices jacobiniennes. Le calcul donne $A^3 = -\text{Id}$, et $B^3 = \text{Id}$. Les images successives de $(1, 0)$ par les itérées de f donnent la séquence

$$(1, 0) \rightarrow (0, -1) \rightarrow (-1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, -1) \rightarrow (-1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0).$$

L'application f est une bijection, car elle possède une application réciproque g définie par $g(x, y) = (|x| - y, x)$. C'est une application continue, de sorte que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Dans le demi-plan $y > 0$, f coïncide avec l'application linéaire dont la matrice est A , tandis que dans le demi-plan $y < 0$, elle coïncide avec l'application linéaire de matrice B . C'est une application "localement linéaire". Chacun des secteurs est inclus dans l'un des deux demi-plans $y \geq 0$ ou $y \leq 0$, et la restriction de f à un secteur est linéaire. L'image d'un secteur angulaire S est donc un secteur angulaire délimité par les images des deux demi-droites délimitant S . C'est le résultat admis dans l'énoncé.

Revenons à la question posée.



Le cycle fourni dans l'énoncé,

$$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{7} \rightarrow \textcircled{9} \rightarrow \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{6} \rightarrow \textcircled{8} \rightarrow \textcircled{1},$$

permet de calculer facilement les différentielles de f et de ses itérées dans les différentes zones. Le tableau suivant indique la différentielle et l'image de la zone, ce qui permet à chaque fois de remplir la ligne suivante en multipliant à gauche la différentielle par celle prise dans la colonne correspondante.

Zone → fonction ↓	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
f	A ③	B ④	B ⑤	B ⑥	A ⑦	A ⑧	A ⑨	A ①	A ②
f^2	BA ⑤	BB ⑥	AB ⑦	AB ⑧	AA ⑨	AA ①	AA ②	AA ③	BA ④
f^3	ABA ⑦	ABB ⑧	AAB ⑨	AAB ①	$AAA = -Id$ ②	$AAA = -Id$ ③	BAA ④	BAA ⑤	BBA ⑥
f^6	$BAAABA = -BBA$ ④	$BAAABB = -Id$ ⑤	$BBAAAB = -Id$ ⑥	$ABAAAB = -ABB$ ⑦	$-ABB$ ⑧	$-AAB$ ⑨	$AABBAA$ ①	$-BAA$ ②	$-BBA$ ③
f^9	$-AABBBBA = Id$ ①	Id ②	Id ③	$-BAAABB = Id$ ④	$-BAAABB = Id$ ⑤	$-BBAAAB = Id$ ⑥	$-ABAAAB = Id$ ⑦	$-ABBBBA = Id$ ⑧	$-AABBBBA = Id$ ⑨

Pour comprendre comment est rempli le tableau, détaillons le remplissage d'une case. Par exemple, regardons la différentielle de f^6 dans la zone ⑦. On lit dans la case du dessus que la différentielle de f^3 dans la zone ⑦ vaut BAA , et que l'image de la zone ⑦ par f^3 est la zone ④. Toujours dans la ligne de f^3 , on lit dans la colonne de la zone ④ que la différentielle de f^3 dans cette zone est AAB . On en déduit que la différentielle de $f^6 = f^3 \circ f^3$ dans la zone ⑦ est $(AAB)(BAA) = AABBAA$. En outre, comme l'image de la zone ④ par f^3 est la zone ①, on peut écrire que l'image de la zone ⑦ par f^6 est la zone ①.

On voit que f^9 est une fonction localement linéaire dont la différentielle est l'identité. C'est l'identité. En particulier, l'ensemble de dérivabilité de f^9 est $\mathbb{R}^2$, ensemble strictement plus grand que l'ensemble de différentiabilité de f . En outre, f est périodique, de période 9.

2.

2.1. La courbe h est la seule à ne pas être bornée. C'est forcément la figure A qui la représente. Restent les figures B, C et D, toutes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. La figure C est également symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc par rapport à l'origine. L'expression de g est la seule à ne contenir que des puissances impaires de sinus et cosinus. Elle vérifie donc $g(t + \pi) = -g(t)$, et c'est la figure C qui représente g . Restent f et k , ainsi que les figures B et D. Seule la figure B montre une courbe passant par $(0, 0)$. Or $k(\pi) = (0, 0)$. C'est donc la figure B qui représente k . Reste donc la figure D, qui doit représenter f .

2.2. L'image de f est obtenue entièrement en restreignant f à $[0, 2\pi]$. On a d'une part

$$w \circ f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 \sin^2 t \end{pmatrix}, \text{ d'autre part } f'(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos t \sin t - 2 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \text{ d'où}$$

$$\langle w \circ f | f' \rangle(t) = -2 \cos t \sin^2 t - 2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t \cos t = -2 \sin^2 t$$

On en déduit la circulation de w le long de f :

$$\int_f w = \int_0^{2\pi} -2 \sin^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos(2t) - 1) dt = -2\pi$$

On trouve une intégrale non nulle le long d'une courbe fermée ; il s'ensuit que w ne dérive pas d'un potentiel.

