

DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°3
à rendre avant le 14 novembre

I

On considère la courbe c paramétrée par $c(t) = \left(\begin{array}{c} 2t - 4 + \frac{2}{t} \\ -t^2 + 4t - 5 + \frac{2}{t} \end{array} \right)$ pour $t \in]0, 2]$.

1. La courbe c possède-t'elle un point singulier ? Si oui, déterminer sa nature, et tracer sommairement la courbe au voisinage de ce point.
2. La courbe c possède-t'elle une asymptote ?
3. Etudier c et la représenter, ainsi que son asymptote s'il y a lieu.
4. En utilisant une intégrale curviligne, calculer l'aire de la région D délimitée par l'axe Ox et la portion de la courbe parcourue lorsque t décrit l'intervalle $[1, 2]$.

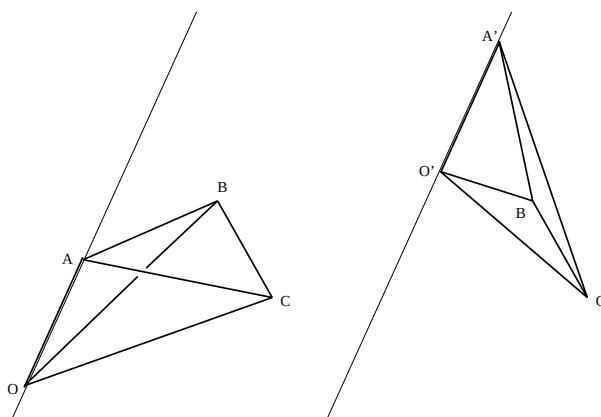
II

Le volume d'un tétraèdre s'exprime au moyen d'un déterminant : si O, A, B, C sont les sommets d'un tétraèdre T , alors

$$\text{volume}(T) = \frac{1}{6} |\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})|.$$

A l'aide de cette formule (admise), démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Si on déplace les points O et A le long de la droite OA , sans changer la longueur du vecteur $\vec{OA}$, le volume du tétraèdre T ne change pas.*



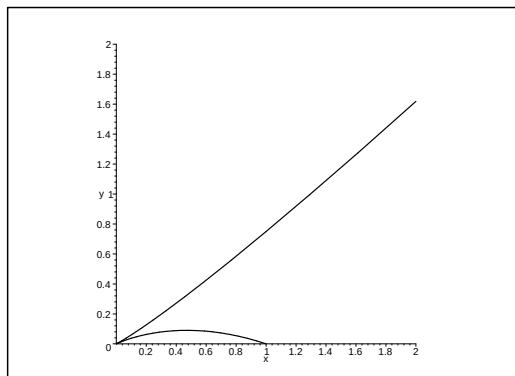
CORRIGÉ DU DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°3

I

1. Le vecteur vitesse $c'(t)$ s'annule exactement pour $t = 1$. Pour effectuer un développement limité en $t = 1$, on fait le changement de variable $t = 1 + u$. On utilise le développement limité classique $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)$. Il vient

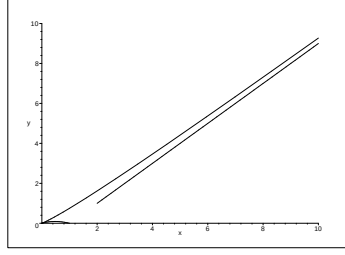
$$\begin{aligned} c(t) &= \begin{pmatrix} 2u - 2 + \frac{2}{1+u} \\ -2 + 2u - u^2 + \frac{2}{1+u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u^2 - 2u^3 + u^3\epsilon(u) \\ u^2 - 2u^3 + u^3\epsilon(u) \end{pmatrix} \\ &= u^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u^3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + u^3\epsilon(u). \end{aligned}$$

Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ étant linéairement indépendants, on a affaire à un point de rebroussement de première espèce, avec demi-tangente de vecteur directeur v_1 . La courbe arrive par le quadrant bordé par v_1 et $-v_2$, donc par en-dessus de la demi-tangente, et repart par en-dessous. Voir figure.



2. Lors que t tend vers 0, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$, donc la courbe c possède une branche infinie. Le rapport $y(t)/x(t)$ tend vers 1, donc la droite vectorielle de pente 1 est une direction asymptotique. La quantité $y(t) - x(t) = -t^2 + 2t - 1$ tend vers -1, donc c admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - 1$.

3. La dérivée $x'(t) = 2 - \frac{2}{t^2}$ ne s'annule qu'en $t = 1$, où elle change de signe. La dérivée $y'(t) = 2t + 4 - \frac{2}{t^2}$ s'annule en $t = 1$ et en $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61\dots$, où elle change de signe. Pour le tracé, on place donc l'asymptote, le point singulier avec sa demi-tangente, le point $c(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ où la tangente est horizontale, le point $c(2)$ et sa tangente.



4. On choisit la forme différentielle $\alpha = y dx$. On calcule

$$\begin{aligned} \int_c \alpha &= \int_1^2 \left(-t^2 + 4t - 5 + \frac{2}{t}\right) \left(2 - \frac{2}{t^2}\right) dt \\ &= \int_1^2 \left(-2t^2 + 8t - 8 - \frac{4}{t} + \frac{10}{t^2} - \frac{4}{t^3}\right) dt \\ &= \frac{17}{6} - 4\ln(2). \end{aligned}$$

On calcule $d\alpha = -dx dy$. D'après la formule de Green-Riemann,

$$\begin{aligned} \text{aire}(D) &= \iint_D -d\alpha \\ &= \int_{\partial D} -\alpha. \end{aligned}$$

Or le bord de D est constitué d'un arc de la courbe c , parcouru en sens inverse, et d'un segment de l'axe Ox , sur lequel la forme α est nulle. On conclut que

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} -\alpha &= \int_c \alpha \\ &= \frac{17}{6} - 4\ln(2) = 0.06... \end{aligned}$$

II

Par hypothèse, le tétraèdre modifié T' a pour sommets $O'A'BC$ où $O\vec{O}'$ et $O\vec{A}'$ sont colinéaires à $O\vec{A}$. En particulier, $O'\vec{A}'$ reste colinéaire à $O\vec{A}$. De plus, on suppose que $O'\vec{A}'$ et $O\vec{A}$ ont même longueur, donc $O'\vec{A}' = O\vec{A}$. On calcule

$$\begin{aligned} 6 \text{ volume}(T') &= \det(O'\vec{A}', O'\vec{B}, O'\vec{C}) \\ &= \det(O\vec{A}, O'\vec{O} + O\vec{B}, O'\vec{O} + O\vec{C}) \\ &= \det(O\vec{A}, O'\vec{O}, O'\vec{O} + O\vec{C}) + \det(O\vec{A}, O\vec{B}, O'\vec{O} + O\vec{C}) \\ &= \det(O\vec{A}, O\vec{B}, O'\vec{O} + O\vec{C}) \\ &= \det(O\vec{A}, O\vec{B}, O'\vec{O}) + \det(O\vec{A}, O\vec{B}, O\vec{C}) \\ &= \det(O\vec{A}, O\vec{B}, O\vec{C}) \\ &= 6 \text{ volume}(T). \end{aligned}$$

On a utilisé la trilinearité du déterminant et le fait que le déterminant de trois vecteurs dont deux sont colinéaires est nul.