

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°3
à rendre avant le 19 novembre

I

Soit K le volume cylindrique défini par les inégalités $x^2 + y^2 \leq 1$ et $-1 \leq z \leq 1$. On oriente son bord par la normale sortante.

Le bord de K est constitué de deux disques Δ_+ et Δ_- et d'une surface cylindrique C .

On considère le champ de vecteur défini sur $\mathbf{R}^3$ par $w(x, y, z) = (x^3, y^3, z)$

1. Calculer le flux de w à travers Δ_+ et à travers Δ_- .
2. Calculer $\iiint_K \operatorname{div}(w)(x, y, z) dx dy dz$.
3. En déduire le flux de w à travers C .
4. Vérifier que $(t, z) \mapsto (\cos t, \sin t, z)$, pour $t \in [0, 2\pi]$ et $z \in [-1, 1]$, est une paramétrisation de C , puis calculer directement le flux de w à travers C .

II

Soit $\mathcal{S}$ la sphère unité d'équation $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $\mathcal{C}$ le cylindre vertical circonscrit à $\mathcal{S}$, d'équation $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Vérifier que $(u, v) \mapsto M(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$, pour $u \in [0, 2\pi]$ et $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, est une paramétrisation de $\mathcal{S}$ régulière en dehors des pôles ($x = y = 0, z = \pm 1$).

Soit $U \subset [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ecrire l'intégrale qui donne l'aire de l'image de U par M . Calculer l'aire de la sphère unité.

2. Vérifier que $(s, t) \mapsto N(s, t) = (\cos s, \sin s, t)$ pour $s \in [0, 2\pi]$ et $t \in \mathbf{R}$ est une paramétrisation de $\mathcal{C}$.

Soit $U \subset [0, 2\pi] \times \mathbf{R}$. Ecrire l'intégrale qui donne l'aire de l'image de U par N .

3. On considère la projection dite *cylindrique perspective* qui consiste à associer à un point $P \in \mathcal{S}$ différent des pôles le point $Q = \varphi(P) \in \mathcal{C}$ tel que O, P, Q soient alignés.

Faire un dessin.

Déterminer les fonctions $(u, v) \mapsto (s(u, v), t(u, v))$ telles que $\varphi(M(u, v)) = N(s(u, v), t(u, v))$.

4. Montrer que le 30ème parallèle partage l'hémisphère nord en deux parties d'aires égales.
Calculer l'aire de l'image par φ sur le cylindre de la partie de la sphère comprise entre l'équateur et le 30ème parallèle.

5. Montrer qu'au-delà du 60ème parallèle, la projection φ augmente les aires d'au moins 8 fois.