

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°4
à rendre avant le 5 décembre

I

A. On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de u .
- 2) Déterminer une base de vecteurs propres de u et écrire la matrice B de u dans cette base.
- 3) Calculer B^n , exprimer A^n à l'aide de B^n et de la matrice de changement de base.
- 4) En déduire A^n .

B. Application

On considère la suite x_n définie par récurrence à partir de x_0, x_1, x_2 par la formule

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

- 1) On considère la suite de vecteurs $X_n = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbf{R}^3$.
Montrer que la relation de récurrence s'exprime $X_{n+1} = u(X_n)$ et $X_0 = (x_0, x_1, x_2)$ en déduire une expression de X_n à l'aide de u et de X_0 .
- 2) En déduire une formule donnant la valeur de x_n pour $n \geq 3$ en fonction des données x_0, x_1, x_2 .
- 3) Considérer les cas particuliers
 $a : x_0 = x_1 = x_2 = 1$, $b : x_0 = x_2 = 1, x_1 = -1$ et $c : x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$.
Ces résultats n'étaient-ils pas prévisibles?

II

On étudie la diagonalisation des matrices carrées d'ordre 2.

A une matrice réelle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on associe le point (x, y) du plan avec $x = \text{tr} A = a + d$ et $y = \det A = ad - bc$.

- 1) Représenter les points du plan correspondant aux matrices
 - a: qui ont deux valeurs propres réelles distinctes
 - b: qui ont une valeur propre double
 - c: qui ont deux valeurs propres complexes distinctes
- 2) On dit qu'une matrice est scalaire si elle est un multiple réel de la matrice identité, c'est à dire si $a = d$ et $b = c = 0$.
- 2) Montrer qu'une matrice carrée d'ordre 2 qui a une valeur propre double ne peut être diagonalisable que si elle est scalaire.
- 3) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice non scalaire soit diagonalisable
 - a) sur les réels.
 - b) sur les complexes.Exprimer ces conditions sur le dessin de la question 1).
- 4) En déduire qu'une matrice symétrique réelle (carrée d'ordre 2) est toujours diagonalisable sur les réels.