

Devoir de Mathématiques n°4

A. Suites récurrentes et matrices.

I. On considère la suite de Fibonacci définie par

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ et } a_1 = a_0 = 1$$

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$, pour $n \geq 0$.Montrer que $V_n = A^n V_0$ 2) Déterminer le polynôme caractéristique de A . Calculer les valeurs propres de A .

★(facultatif) Comparer avec le nombre d'or ω , qui est le rapport entre deux cotés d'un rectangle, tel que si on lui retire un carré au petit coté on obtienne un rectangle semblable, c'est à dire dont les cotés sont dans le rapport ω : faire un dessin pour écrire l'équation du second degré qui est vérifiée, puis résoudre.

3) Exprimer V_0 dans une base de vecteurs propres de A , puis exprimer V_n dans cette base pour en déduire la valeur a_n .

II. On considère la suite définie par

$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 4b_n \text{ et } b_1 = b_0 = 1$$

1) On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $W_n = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$, pour $n \geq 0$.Montrer que $W_n = B^n W_0$ 2) Déterminer le polynôme caractéristique de B , calculer les valeurs propres de B .3) Montrer que, pour une valeur λ que l'on déterminera, la matrice $N = B - \lambda I$, où I est la matrice unité, vérifie $N^2 = 0$.4) Calculer B^n et en déduire b_n .

III. On considère la suite définie par

$$c_{n+1} = \frac{3c_n + 4}{4c_n + 3} \text{ avec } c_0 \text{ donné.}$$

1) On introduit deux suites auxiliaires u_n et v_n de sorte que $c_n = \frac{u_n}{v_n}$ et $u_0 = c_0$, $v_0 = 1$.Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$: montrer que le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ vérifie $U_{n+1} = CU_n$.2) Calculer C^n dans une base de vecteurs propres, et en déduire la valeur de la suite dans les trois cas $c_0 = 1$, $c_0 = -1$, et $c_0 = 2$.

B. On considère la matrice

$$A = A_{a,b,c,d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

1) Calculer le rang de A quand $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et dans le cas général. Quel est l'espace propre correspondant à la valeur propre 0?2) On suppose $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer que pour deux valeurs de α le vecteur $v_\alpha = (a, b, c, \alpha)$ est vecteur propre de A , et que les deux valeurs propres correspondantes sont distinctes et non nulles.En déduire que A est diagonalisable.3) Diagonaliser $A_{1,2,3,4}$ en précisant la base de vecteurs propres utilisée et la matrice de changement de base.4)★ (facultatif) Généraliser en dimension n quelconque.