

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
16 janvier 2001, durée 3 heures
Les documents et calculatrices sont interdits

I

Soit a un paramètre réel. Pour n entier, $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{an^2}$.

1. Pour quelles valeurs de a la suite u_n est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de a la série de terme général u_n est-elle convergente ?

II

Soit a un paramètre réel, soit $A_a = \begin{pmatrix} -a^2 & 2 \\ -2a^3 & a^2 + 2a \end{pmatrix}$. On note u_a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est A_a .

1. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme u_a est-il diagonalisable ?
2. On suppose que $a = 1$. Soit $B = A_1 - I_2$. Que vaut B^2 ?
En utilisant la formule du binôme, calculer A_1^n pour $n \in \mathbf{N}$.
3. Désormais, on suppose que $a = -1$. Donner une base de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de u_{-1} dont la première composante vaut 1.
4. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}A_{-1}P = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer A_{-1}^n pour $n \in \mathbf{N}$.

III

On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par $w(x, y, z) = (xy, -x^2, 0)$.

1. Quel est le flux de w à travers l'hémisphère $H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > 0\}$?
2. Quelle est la divergence de w ? Quel est le flux de w à travers le bord du cube K défini par les inégalités $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$?

IV

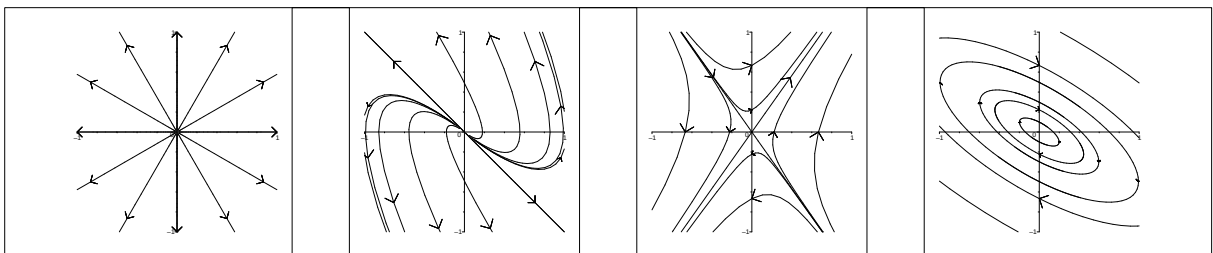
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

V

Soit a un paramètre réel. On s'intéresse au système différentiel (S_a)

$$\begin{aligned}x'(t) &= (1-a)x(t) + (1-2a)y(t) \\ y'(t) &= ax(t) + (1+a)y(t).\end{aligned}$$

1. Tracer sommairement les trajectoires du système $(S_{1/2})$.
2. Parmi les huit figures (a) à (h) ci-dessous, cinq d'entre elles ne peuvent pas représenter même approximativement les trajectoires d'un système de la famille (S_a) . Lesquelles ? On justifiera les réponses en raisonnant sur les valeurs propres et vecteurs propres.

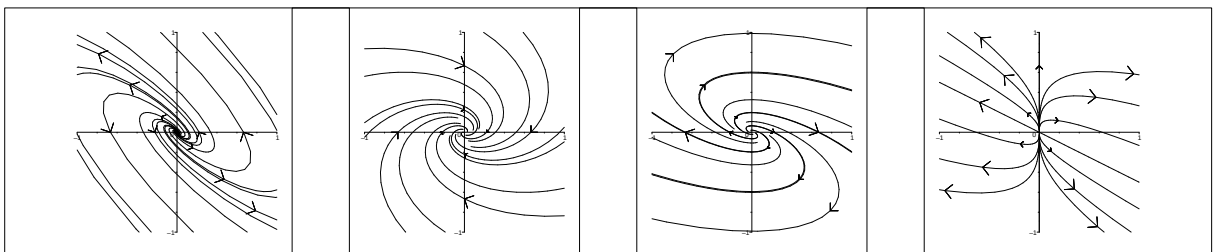


(a)

(b)

(c)

(d)



(e)

(f)

(g)

(h)

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
16 janvier 2001, durée 3 heures

I

1. Comme $u_n > 0$, on peut étudier

$$v_n = \ell n(u_n) = -\ell n(n) + an^2 \ell n(1 + \frac{1}{n}) = -\ell n(n) + an^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(\frac{1}{n}))$$

où $\epsilon(\frac{1}{n})$ tend vers 0. On constate que

$$\frac{v_n}{n} = -\frac{\ell n(n)}{n} + a(1 + \epsilon(\frac{1}{n}))$$

tend vers a . Si $a > 0$, $\lim v_n = +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$. Si $a < 0$, $\lim v_n = -\infty$ donc $\lim u_n = 0$. Enfin, si $a = 0$, $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0. On conclut que la suite u_n est convergente si et seulement si $a \leq 0$.

2. Pour que la série de terme général u_n soit convergente, il faut que u_n tende vers 0, i.e. que $a \leq 0$.

Si $a < 0$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$,

$$\frac{v_n}{n} \leq \frac{a}{2}.$$

Alors

$$0 < u_n \leq e^{\frac{a}{2}n}.$$

Comme la série de terme général $e^{\frac{a}{2}n}$ est convergente, le principe de comparaison entraîne que la série de terme général u_n est convergente.

On peut aussi utiliser le critère de Cauchy. Comme $u_n > 0$ et $u_n^{1/n}$ tend vers $e^a < 1$, la série de terme général u_n est convergente.

Si $a = 0$, u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, le principe de comparaison entraîne que la série de terme général u_n est divergente.

Un conclut que la série de terme général u_n est-elle convergente si et seulement si $a < 0$.

II

1. Le polynôme caractéristique de u_a est $P_a(X) = X^2 - 2aX - a^4 + 2a^3$. Son discriminant $(a^2 - a)^2$ est positif ou nul, et s'annule si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$.

Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, les racines sont distinctes. Les valeurs propres de u_a sont de multiplicité 1. Par conséquent, u_a est diagonalisable.

Si $a = 0$ ou 1, A_a a une valeur propre double. $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles à l'identité. Par conséquent, elles ne sont pas diagonalisables.

2. Du théorème de Cayley-Hamilton, il résulte que $B^2 = 0$ (ce qu'on vérifie aisément). La formule du binôme (valable car I_2 et B commutent), donne

$$A_1^n = (I_2 + B)^n = I_2 + nB = \begin{pmatrix} 1 - 2n & 2n \\ -2n & 1 + 2n \end{pmatrix}.$$

3. Si $a = -1$, les valeurs propres sont -3 et 1 .

L'espace propre E_{-3} , défini par le système

$$\begin{aligned} -x + 2y &= -3x \\ 2x - y &= -3y \end{aligned}$$

est la droite d'équation $y = -x$. On choisit comme vecteur directeur $v_1 = (1, -1)$.

L'espace propre E_1 , défini par le système

$$\begin{aligned} -x + 2y &= x \\ 2x - y &= y \end{aligned}$$

est la droite d'équation $y = x$. On choisit comme vecteur directeur $v_2 = (1, 1)$.

Dans cette base, la matrice de u_{-1} est $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Il suffit de prendre la matrice de passage de la base (e_1, e_2) vers la base (v_1, v_2) , soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} A_{-1}^n &= P \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-3)^n & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 + (-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III

1. En chaque point p de la sphère unité, la normale sortante est $n(p) = p$. Le produit scalaire $w(p) \cdot p$ est identiquement nul, donc le flux, intégrale de ce produit scalaire par rapport à l'élément d'aire, est nul.

2. D'après le théorème d'Ostrogradsky, Le flux de w à travers le bord du cube K est égal à l'intégrale sur K de la divergence de w , soit

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div}(w) \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 y \, dy \right) dx \right) dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

par parité.

IV

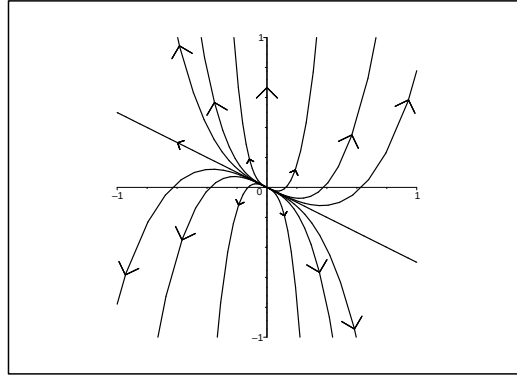
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 11 & 4 & -11 \\ 0 & 10 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 4 & -11 \\ 10 & -3 & -10 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 10 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = 5(-73) = -365.$$

V

1. Soit $A_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1-2a \\ a & 1+a \end{pmatrix}$ la matrice du système. Son polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a + a^2$. Le discriminant vaut $4a(1-a)$.

Lorsque $a = 1/2$, $A_{1/2}$ a pour valeurs propres $1/2$ et $3/2$ et pour droites propres $E_{1/2}$ d'équation $y = -x/2$ et $E_{3/2}$ d'équation $x = 0$. Cinq trajectoires sont portées par les deux droites propres. Les autres trajectoires arrivent à l'origine tangentiellement à $E_{1/2}$ et ont $E_{3/2}$ pour direction asymptotique à l'infini. Voir figure.



2. Lorsque le discriminant s'annule (en $a = 0$ ou $a = 1$), la matrice A_a n'est pas proportionnelle à la matrice unité, donc A_a n'est pas diagonalisable. Par conséquent, (S_0) et (S_1) sont des noeuds dégénérés.

Lorsque $0 < a < 1$, la matrice A_a a deux valeurs propres distinctes. Leur produit $1 - a + a^2$ est strictement positif, donc elles sont de même signe. Par conséquent, (S_a) est un noeud non dégénéré.

Lorsque $a < 0$ ou $a > 1$, la matrice A_a a deux valeurs propres non réelles. Leur somme vaut 2 donc elles ne sont pas imaginaires pures. Par conséquent, (S_a) est un foyer.

Dans tous les cas, la somme des valeurs propres est $2 > 0$, donc les (parties réelles des) valeurs propres sont positives. Par conséquent, pour tout a , le système (S_a) est répulsif.

On conclut que les dessins (a) (soleil), (c) (col), (d) (centre) et (f) (foyer attractif) ne peuvent correspondre à aucun des systèmes différentiels (S_a) .

La figure (h) représente un noeud non dégénéré répulsif dont l'une des droites propres est l'axe Oy . La matrice correspondante doit être triangulaire inférieure. Dans la famille (S_a) , cela n'arrive que pour $a = 1/2$. Or on vient de faire le tracé : la direction asymptotique des trajectoires non rectilignes n'est pas la bonne. Par conséquent, la figure (h) ne correspond pas à $(S_{1/2})$ donc à aucun des (S_a) .