

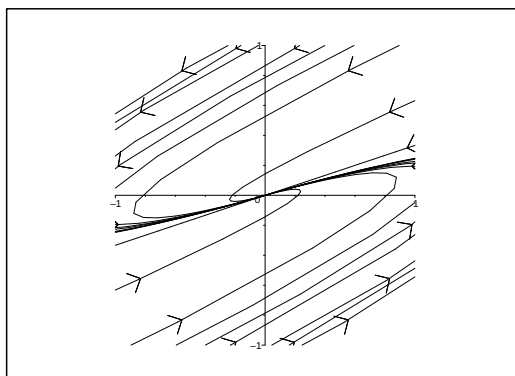
EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
16 janvier 2004, durée 3 heures
Les documents et calculatrices sont interdits

I

On s'intéresse à la famille de systèmes différentiels

$$(S_a) \begin{cases} x' &= (a-3)x + (-9+8a-2a^2)y \\ y' &= x + (3-2a)y \end{cases}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice du système (S_a) (il n'y a pas de terme en a^2 dedans). Indiquer, suivant la valeur de a , quel est le type du système (S_a) . On pourra faire un tableau.
2. Tracer les trajectoires du système $(S_{9/2})$.
3. A quelle valeur de a correspond la figure ci-dessous ?



4. Pour quelles valeurs de a existe-t-il des solutions qui ne tendent pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$?

II

Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 1 \\ -8 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(2I - A)$. Que peut-on en déduire au sujet du polynôme caractéristique de A ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de A . La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?
3. Soit $F \subset \mathbf{R}^4$ le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x - z &= 0 \\ -z + t &= 0 \end{cases}$$

Soit v un vecteur de F . Que vaut Av ? Sans calculs, écrire la solution du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ de condition initiale $X(0) = v$.

III

On s'intéresse aux suites solutions de l'équation de récurrence linéaire (E) suivante

$$u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0. \quad (E)$$

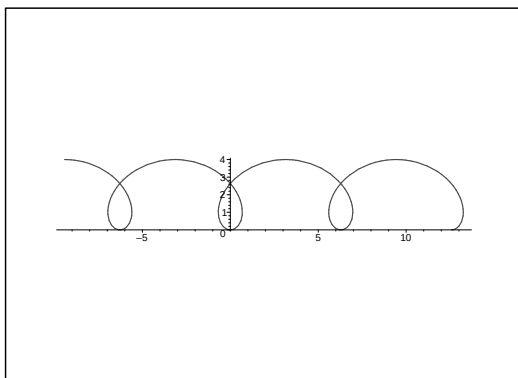
1. Quelle est la nature de l'ensemble des suites solutions de (E) ? Quelle est sa dimension ?
2. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice 3×3 A telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.
3. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A (ses racines sont de petits entiers). La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?
4. Déterminer toutes les solutions de (E) qui sont de la forme $u_n = r^n$ où $r \in \mathbf{C}$. Vérifier que la suite $v_n = n$ est solution de (E) .
5. Vérifier que les suites trouvées en 4 sont linéairement indépendantes. Ecrire la forme générale des suites solution de l'équation (E) .

IV

Soit $a > 0$ un paramètre réel. On s'intéresse aux courbes c_a définies sur $\mathbf{R}$ par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x_a(t) = t - a \sin t \\ y_a(t) = a - a \cos t \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la courbe c_a admet-elle des points singuliers ? Quelle est la nature de ces points singuliers ?
2. Dans cette question, on suppose $a = 2$. La figure ci-dessous représente la courbe c_2 . Tracer la portion de c_2 correspondant à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Indiquer le sens de parcours.



3. A l'aide d'une intégrale curviligne, calculer, pour a quelconque, l'aire située entre la portion de la courbe c_a correspondant à l'intervalle $[0, 2\pi]$ et le segment joignant ses extrémités.

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
16 janvier 2004, durée 3 heures

I

1. Soit $A_a = \begin{pmatrix} a-3 & -9+8a-2a^2 \\ 1 & 3-2a \end{pmatrix}$ la matrice du système. Sa trace vaut $-a$, son déterminant a , son polynôme caractéristique $P(x) = x^2 + ax + a$. Le discriminant de ce trinôme vaut $a^2 - 4a$.

Si $a < 0$ ou $a > 4$, $a^2 - 4a > 0$ donc A_a a deux valeurs propres distinctes. Leur produit vaut a donc elles sont de même signe si $a > 0$, de signes opposés si $a < 0$. Leur somme $-a$ est strictement négative si $a > 4$. On conclut que (S_a) est un *noeud non dégénéré attractif* si $a > 4$, un *col* si $a < 0$.

Si $a = 0$, la matrice A_0 a 0 pour valeur propre double. Par conséquent, le système (S_0) est de type O_2 .

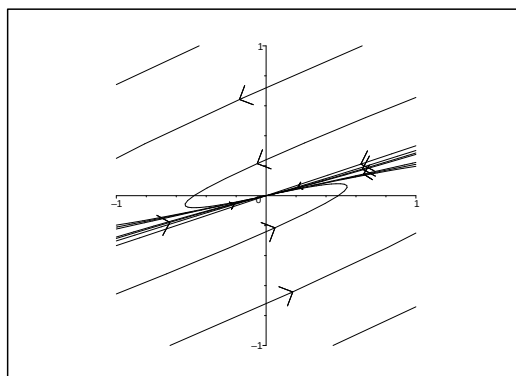
Si $a = 4$, A_a a une valeur propre double égale à -2 . A_4 n'est pas diagonale, donc pas diagonalisable, donc (S_4) est un *noeud dégénéré attractif*.

Si $0 < a < 4$, le discriminant $a^2 - 4a$ est strictement négatif, donc les valeurs propres sont non réelles. Leur partie réelle vaut $-a/2$ qui est strictement négatif. On conclut que (S_a) est un *foyer attractif* si $0 < a < 4$.

a	$a < 0$	$a = 0$	$0 < a < 4$	$a = 4$	$a > 4$
type	col	O_2	foyer attractif	noeud dégénéré attractif	noeud non dégénéré attractif

2. D'après 1, le système $(S_{9/2})$ est un noeud non dégénéré attractif.

Les valeurs propres de $A_{9/2}$ sont -3 et $-3/2$. C'est $-3/2$ qui a la plus petite valeur absolue. L'espace propre E_{-3} , défini par $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{27}{2}y = -3x \\ x - 6y = -3y \end{cases}$, est la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$. L'espace propre $E_{-3/2}$, défini par $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{27}{2}y = -\frac{3}{2}x \\ x - 6y = -\frac{3}{2}y \end{cases}$, est la droite d'équation $y = \frac{2}{9}x$. C'est elle qui est tangente à l'origine aux trajectoires curvilignes. D'où la figure



3. La figure représente un noeud dégénéré. Par conséquent, elle correspond à $a = 4$.
4. Si $a > 0$, (S_a) est un foyer attractif, un noeud dégénéré attractif ou un noeud non dégénéré attractif. Par conséquent toutes les solutions tendent vers 0.
- Si $a < 0$, (S_a) est un col, donc les solutions de condition initiale un vecteur propre de valeur propre positive tendent vers l'infini.
- Si $a = 0$, la matrice A_0 a un noyau non réduit à 0. Chaque vecteur non nul de ce noyau est une solution constante, qui ne tend donc pas vers 0.
- On conclut que (S_a) possède des solutions qui ne tendent pas vers 0 si et seulement si $a \leq 0$.

II

Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 1 \\ -8 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Le déterminant $\det(2I - A) = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \\ 8 & 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ comporte deux lignes égales, donc il est nul.

Par conséquent, 2 est racine du polynôme caractéristique de A .

2. On calcule le polynôme caractéristique de A . En développant suivant la deuxième colonne, puis en retranchant la première ligne à la dernière, il vient

$$\begin{aligned} \det(xI - A) &= \begin{vmatrix} x+6 & 0 & -6 & -1 \\ -2 & x-1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & x-5 & -1 \\ 8 & 0 & -6 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x+6 & -6 & -1 \\ 5 & x-5 & -1 \\ 8 & -6 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} x+6 & -6 & -1 \\ 5 & x-5 & -1 \\ 2-x & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2) \begin{vmatrix} x+6 & -6 & -1 \\ 5 & x-5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x-2) \begin{vmatrix} x+5 & -6 & -1 \\ 4 & x-5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2) \begin{vmatrix} x+5 & -6 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x-2)(x^2 - 1) = (x-1)^2(x-2)(x+1). \end{aligned}$$

Comme 1 est valeur propre double, on calcule l'espace propre E_1 . Il est défini par le système

$$\begin{cases} -6x + 6z + t = x \\ 2x + y - 2z = y \\ -5x + 5z + t = z \\ -8x + 6z + 3t = t \end{cases}, \text{ équivalent à } \begin{cases} -7x + 6z + t = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ -5x + 4z + t = 0 \\ -8x + 6z + 2t = 0 \end{cases}.$$

En utilisant le coefficient de t comme pivot, il vient

$$\begin{cases} -7x + 6z + t = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 6x - 6z = 0 \end{cases}, \text{ qui équivaut à } \begin{cases} -x + t = 0 \\ x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Ce système est de rang 2, donc $\dim E_1 = 2$ est égale à la multiplicité de la valeur propre 1. Comme les deux autres valeurs propres, -1 et 2 , sont simples, on conclut que A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

3. F coïncide avec l'espace propre E_1 , donc $Av = v$ pour tout $v \in F$. Par conséquent $t \mapsto X(t) = e^{tA}v$ est solution du système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et satisfait $X(0) = v$.

III

1. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des suites de réels. L'application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui à une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $v_n = u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$ est linéaire. L'espace $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est le noyau de f , donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

On peut aussi vérifier directement que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont des solutions de (E) et λ, λ' des réels, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $v_n = \lambda u_n + \lambda' u'_n$ est encore une solution de (E) , ce qui prouve que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

L'application $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}^3$ qui à une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ associe le vecteur (u_2, u_1, u_0) est linéaire et bijective, donc $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbf{R}^3 = 3$.

2. On trouve $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On calcule le polynôme caractéristique $P_A(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$. Comme l'une des valeurs propres est de multiplicité 2, on calcule l'espace propre E_1 . Il est défini par le système

$$\begin{cases} y &= x \\ z &= y \\ -x + y + z &= z \end{cases}$$

équivalent au système

$$\begin{cases} -x + y &= 0 \\ -y + z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

dont le rang vaut 2. Comme $\dim E_1 = 1 < 2$, la matrice A n'est pas diagonalisable, ni sur $\mathbf{R}$ ni sur $\mathbf{C}$.

3. $u_n = r^n$ est solution de (E) si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$, d'où $r = 1$ ou $r = -1$. Si $v_n = n$, alors $v_{n+3} - v_{n+2} - v_{n+1} + v_n = n+3 - n-2 - n-1 + n = 0$ donc v_n est solution de (E) .

4. Montrons que les trois suites solutions particulières $x_n = (-1)^n$, $y_n = 1$ et $v_n = n$ sont linéairement indépendantes. Soient α, β et γ des réels. Supposons que $u_n = \alpha(-1)^n + \beta + \gamma n = 0$ pour tout n . Alors

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma &= u_2 = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma &= u_1 = 0 \\ \alpha + \beta &= u_0 = 0 \end{aligned}$$

d'où $\gamma = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$. Les suites (x_n) , (y_n) et (v_n) sont donc des éléments linéairement indépendants de l'espace $\mathcal{S}$ des solutions. Comme $\dim \mathcal{S} = 3$, il s'agit d'une base. Par conséquent, toute solution de (E) est de la forme $u_n = \alpha(-1)^n + \beta + \gamma n$ pour α, β et γ réels.

III

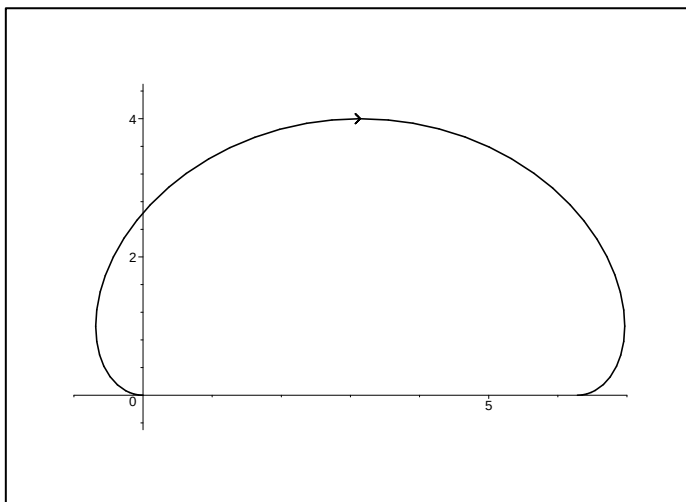
1. La dérivée $y'_a(t) = a \sin(t)$ ne s'annule qu'en $0, \pi$ et 2π . En ces valeurs, x'_a vaut respectivement $1 - a$ et $1 + a$. La vitesse s'annule seulement si $a = 1$, donc seule c_1 présente des points singuliers,

et c'est en $t = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. On calcule le développement à l'ordre 3 au voisinage de 0

$$c_1(t) = t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \epsilon(t),$$

qui montre que le point singulier $c_1(0) = 0$ est un point de rebroussement de première espèce, avec demi-tangente dirigée par $(0, \frac{1}{2})$. Par périodicité, le point singulier $c_1(2k\pi) = (2k\pi, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce, avec demi-tangente dirigée par $(0, \frac{1}{2})$.

2. On place les points $c_2(0)$ et $c_2(2\pi)$, qui découpent une arche de la courbe c_2 . On peut calculer $x'_2(\pi) = 1 - 2 \cos(\pi) = 3 > 0$ pour avoir le sens de parcours.



3. On utilise la forme différentielle $\alpha = -y dx$. Elle satisfait $d\alpha = dx dy$ et elle s'annule sur le segment reliant les extrémités $(0,0)$ et $(2\pi,0)$ de c_a . On remarque que l'orientation de c_a est opposée à celle du bord du domaine D délimité par c_a et le segment. D'après la formule de Green-Riemann, l'aire cherchée vaut

$$\begin{aligned} \text{aire}(D) &= \iint_D dx dy = \iint_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha = - \int_{c_a} \alpha \\ &= \int_{c_a} y dx \\ &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos(t))(1 - a \cos(t)) dt \\ &= a \int_0^{2\pi} (1 + a \cos^2(t)) dt = 2\pi a + \pi a^2 \end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} \cos t dt = 0$ et $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$.