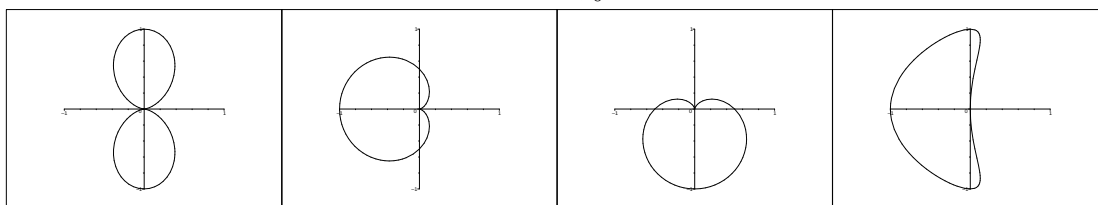


EXAMEN DE MATHÉMATIQUES, DEUXIÈME SESSION
3 septembre 2002, durée 3 heures
Les documents et calculatrices sont interdits

I

On étudie la courbe c paramétrée par $x(t) = \sin(t)^2 \cos(2t)$, $y(t) = -\sin(t)^2 \sin(2t)$, pour $t \in [0, \pi]$.

1. La courbe c admet-elle une tangente, une demi-tangente à l'origine ?
2. La courbe c possède-t-elle une symétrie ?
3. Parmi les 4 courbes ci-dessous, dire laquelle est c , reproduire le dessin en indiquant le sens de parcours.
4. Calculer la circulation le long de c du champ de vecteurs $w(x, y) = (y, -x)$. En déduire l'aire du domaine D entouré par la courbe c (on donne $\int_0^\pi \sin^4(t) dt = 3\pi/8$).



(a)

(b)

(c)

(d)

II

Soit a un paramètre réel. On note u_a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A_a = \begin{pmatrix} a & -1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme u_a est-il diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?
2. Dans cette question et la suivante, on suppose que $a = 5$. Donner une base de $\mathbf{R}^2$ formée de vecteurs propres de u_5 .
3. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}A_5P$ soit diagonale. Calculer A_5^n pour $n \in \mathbf{N}$.

III

On cherche à résoudre le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + y(t) + e^{2t} \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{cases}.$$

1. Trouver une solution particulière de (S) .
2. Exprimer la solution générale de (S) .
3. Calculer la solution de (S) telle que $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.
Quelle est sa limite lorsque t tend vers $-\infty$?

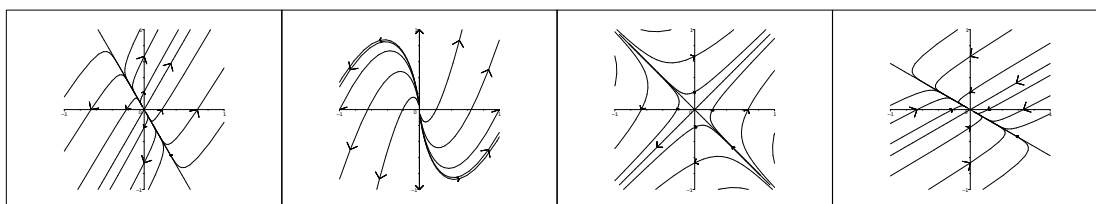
IV

Soit a un paramètre réel. On s'intéresse à la famille de systèmes différentiels

$$(S_a) \begin{cases} x'(t) &= ax(t) + (a-1)y(t) \\ y'(t) &= (a+1)x(t) + ay(t) \end{cases}.$$

On justifiera les réponses en raisonnant sur les valeurs propres et les vecteurs propres.

1. Montrer que la figure (c) ci-dessous ne correspond à aucun des systèmes (S_a) .
2. Suivant la valeur de a , dire dans quelle catégorie du catalogue se trouve le système (S_a) .
3. Parmi les figures ci-dessous, identifier celles qui correspondent aux systèmes (S_1) et (S_2) .
4. Tracer sommairement les trajectoires du système $(S_{-5/4})$.
5. Pour quelles valeurs de a le système (S_a) possède-t'il une solution non constante $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$?



(a)

(b)

(c)

(d)

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES, 2ÈME SESSION
3 septembre 2002, durée 3 heures

I

1. Le développement limité

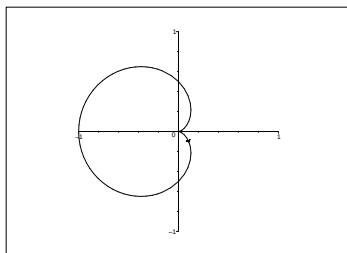
$$(x(t), y(t)) = t^2(1, 0) - 2t^3(0, 1) + t^3\epsilon(t).$$

montre que la courbe admet en $t = 0$ une demi-tangente orientée suivant $(1, 0)$ et que l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

2. Comme $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, le changement de t en $-t$ correspond à une symétrie par rapport à l'axe Ox .

3. La courbe de la figure (d) ne possède pas de point de rebroussement, celle de la figure (c) n'est pas symétrique par rapport à l'axe Ox . Celle de la figure (a) possède une symétrie par rapport à l'axe Oy que n'a pas c . On conclut que c correspond à la figure (b).

Voici le sens de parcours.



4. On calcule le produit scalaire

$$\begin{aligned} w(c(t)) \cdot c'(t) &= y(t)x'(t) - x(t)y'(t) \\ &= -\sin^2(t)\sin(2t)(2\cos(t)\sin(t)\cos(2t) - 2\sin^2(t)\sin(2t)) \\ &\quad + \sin^2(t)\cos(2t)(2\cos(t)\sin(t)\sin(2t) - 2\sin^2(t)\cos(2t)) \\ &= 2\sin^4 t \end{aligned}$$

d'où

$$\text{circulation}(w, c) = \int_0^\pi 2\sin^4 t \, dt = 3\pi/4.$$

Sachant que l'orientation choisie sur c est l'inverse de celle induite comme bord de D , la formule de Green-Riemann donne

$$\begin{aligned} \text{circulation}(w, c) &= - \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= 2 \text{aire}(D) \end{aligned}$$

donc l'aire de D vaut $3\pi/8$.

II

1. Le polynôme caractéristique de u_a est $x^2 + 1 - 2a$. Si $a > 1/2$, il a deux racines réelles distinctes, donc u_a est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Si $a < 1/2$, il a deux racines non réelles, donc u_a est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ mais pas sur $\mathbf{R}$. Si $a = 1/2$, $A_{1/2}$ possède une valeur propre double mais n'est pas diagonale, donc $u_{1/2}$ n'est pas diagonalisable.

2. Lorsque $a = 5$, les valeurs propres de u_5 sont 3 et -3 . L'espace propre E_3 est défini par le système linéaire

$$\begin{cases} 5x + 4y = 3x \\ -4x - 5y = 3y \end{cases}.$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $v_1 = (2, -1)$.

L'espace propre E_{-3} est défini par le système linéaire

$$\begin{cases} 5x + 4y = -3x \\ -4x - 5y = -3y \end{cases}.$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $v_2 = (-1, 2)$. Les vecteurs propres v_1 et v_2 forment une base de $\mathbf{R}^2$.

3. On prend pour P la matrice de passage de la base canonique vers la base (v_1, v_2) , soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$P^{-1}A_5P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} A_5^n &= P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n-1}(4 - (-1)^n) & 3^{n-1}(2 - 2(-1)^n) \\ 3^{n-1}(-2 + 2(-1)^n) & 3^{n-1}(-1 + 4(-1)^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

III

1. La matrice du système (S) a pour polynôme caractéristique $x^2 - 4x + 3$ dont les racines sont 1 et 3. Comme 2 n'est pas valeur propre, il existe une solution de la forme $X_0(t) = e^{2t}v$ où $v \in \mathbf{R}^2$. Cherchons v sous la forme $v = (x, y)$. Il vient

$$2xe^{2t} - 2xe^{2t} - ye^{2t} - e^{2t} = 0 \quad \text{et} \quad 2ye^{2t} - xe^{2t} - 2ye^{2t} = 0$$

d'où

$$\begin{cases} y = -1 \\ -x = 0 \end{cases}$$

soit $x = 0$ et $y = -1$. La fonction $t \mapsto (0, -e^{2t})$ est une solution de (S) .

2. On calcule une base de vecteurs propres de la matrice du système. L'espace propre E_1 est défini par le système

$$\begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{cases}.$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, -1)$.

L'espace propre E_3 est défini par le système

$$\begin{cases} 2x + y &= 3x \\ x + 2y &= 3y \end{cases}.$$

C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $(1, 1)$.

La solution générale de (S) s'écrit donc

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix},$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

3. La condition initiale $X(0) = (0, 0)$ se traduit par le système

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 1 \end{cases}$$

dont la solution est $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/2$. La solution de (S) issue de l'origine est donc

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$.

IV

1. La figure (c) représente un col, i.e. un système ayant deux valeurs propres réelles de signes opposés. Or le polynôme caractéristique de la matrice du système est $x^2 - 2ax + 1$, donc le produit de ses racines vaut 1. Lorsqu'elles sont réelles, les valeurs propres sont nécessairement de même signe. Par conséquent, le système (S_a) n'est jamais un col.

2. Le polynôme caractéristique de la matrice du système est $x^2 - 2ax + 1$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $4(a+1)(a-1)$.

Lorsque $|a| < 1$, les racines ne sont pas réelles, leur partie réelle vaut a . Si, de plus, $a \neq 0$, les racines ne sont pas imaginaires pures. Par conséquent, si $-1 < a < 0$, le système (S_a) est un foyer attractif. Si $0 < a < 1$, le système (S_a) est un foyer répulsif. Si $a = 0$, (S_0) est un centre.

Lorsque $|a| = 1$, le polynôme caractéristique possède une racine double qui vaut a . La matrice du système n'est pas diagonale, donc elle n'est pas diagonalisable. Par conséquent, (S_{-1}) est un noeud dégénéré attractif, (S_{-1}) est un noeud dégénéré répulsif.

Lorsque $|a| > 1$, les racines sont réelles distinctes, de même signe, du signe de a . Par conséquent, si $a < -1$, (S_a) est un noeud non dégénéré attractif. Si $a > 1$, (S_a) est un noeud non dégénéré répulsif.

3. Seule la figure (b) représente un noeud dégénéré, il s'agit donc de (S_1) . Seule la figure (a) représente un noeud non dégénéré répulsif, il s'agit donc de (S_2) .

4. Les valeurs propres de la matrice du système $(S_{-5/4})$ sont -2 et $-1/2$. L'espace propre E_{-2} est défini par le système

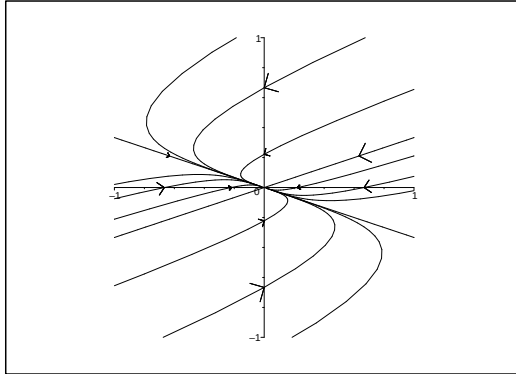
$$\begin{cases} -\frac{5}{4}x - \frac{9}{4}y &= -2x \\ -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}y &= -2y \end{cases},$$

c'est la droite de pente $1/3$. L'espace propre $E_{-1/2}$ est défini par le système

$$\begin{cases} -\frac{5}{4}x - \frac{9}{4}y &= -\frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}y &= -\frac{1}{2}y \end{cases},$$

c'est la droite de pente $-1/3$.

Les trajectoires curvilignes du système doivent être tangentes à $E_{-1/2}$ à l'origine, et posséder E_{-2} comme direction asymptotique. Comme les valeurs propres sont négatives, les flèches sont tournées vers l'origine. Cela donne la figure suivante.



5. Si $a < 0$, le système (S_a) est attractif, dont toutes les solutions tendent vers 0 . Si $a = 0$, le système (S_0) est un centre. Les trajectoires autres que celle de 0 sont des ellipses (ici, des cercles) concentriques, donc les solutions non constantes ne tendent pas vers 0 . Si $a > 0$, le système (S_a) est répulsif, donc aucune solution non constante ne tend vers 0 .