

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES  
3 septembre 2003, durée 3 heures  
*Les documents et calculatrices sont interdits*

I

Soit  $C$  la courbe paramétrée par

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 - \cos t \\y(t) &= \sin^3 t,\end{aligned}$$

pour  $t \in [0, 2\pi]$ .

1. Etudier le point singulier de  $C$  en  $t = 0$  :  $C$  possède-t-elle une tangente, une demi-tangente en ce point ? Tracer sommairement la courbe au voisinage de l'origine, indiquer le sens de parcours.
2. Soit  $w$  le champ de vecteurs défini sur  $\mathbf{R}^2$  par

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la circulation de  $w$  le long de  $C$  (on donne  $\int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}$ ).

3. En déduire l'aire du domaine entouré par  $C$ .

II

Calculer le déterminant 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

III

Soit  $a$  un paramètre réel. On considère l'endomorphisme  $u_a$  de  $\mathbf{R}^2$  défini par

$$u_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - (1+a)y \\ 2x + (1+2a)y \end{pmatrix}.$$

On note  $A_a$  sa matrice.

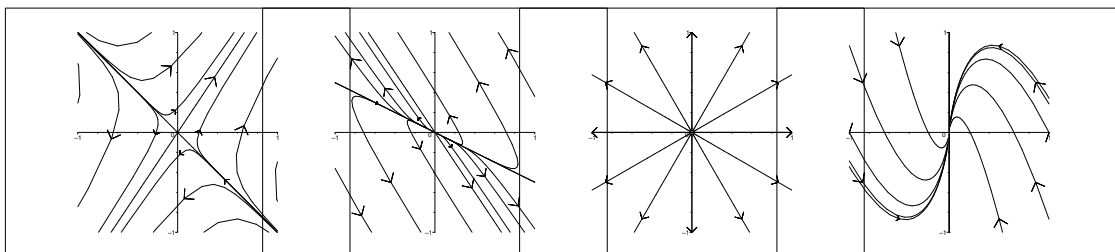
1. Pour quelles valeurs de  $a$  l'endomorphisme  $u_a$  est-il diagonalisable ? diagonalisable sur  $\mathbf{C}$  ?
2. On suppose que  $a = 1$ . En utilisant la formule du binôme, calculer les puissances de  $A_1$ .
3. On suppose que  $a = 5/4$ . Trouver une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}A_{5/4}P$  soit diagonale.
4. On suppose que  $a = 0$ . Trouver une matrice *complexe*  $Q$  telle que  $Q^{-1}A_0Q$  soit diagonale.

# IV

On s'intéresse à la famille de systèmes différentiels  $(S_a)$

$$\begin{aligned}x'(t) &= -x(t) - (1+a)y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + (1+2a)y(t).\end{aligned}$$

1. Tracer sommairement les trajectoires du système  $(S_{5/4})$ .
2. Parmi les huit figures (a) à (h) ci-dessous, trois d'entre elles ne peuvent pas représenter même approximativement les trajectoires d'un système de la famille  $(S_a)$ . Lesquelles ? On justifiera les réponses en raisonnant sur les valeurs propres et vecteurs propres.

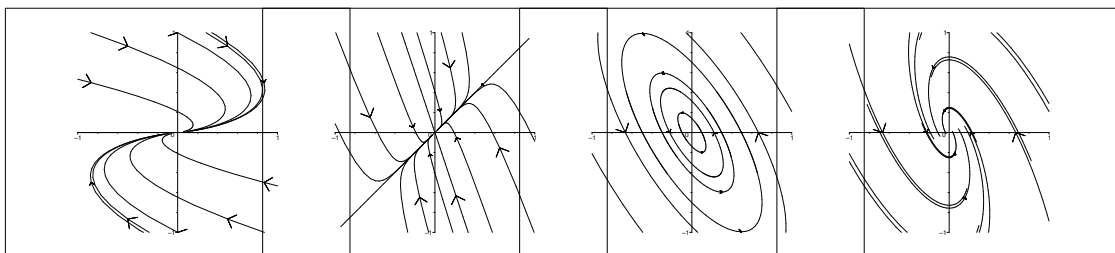


(a)

(b)

(c)

(d)



(e)

(f)

(g)

(h)

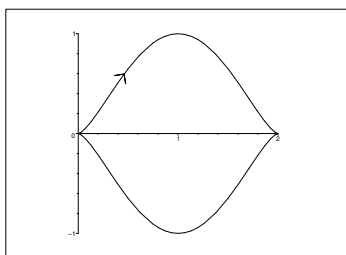
CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES  
3 septembre 2003, durée 3 heures

I

1. Comme  $x'(0) = y'(0) = 0$ , la courbe  $C$  possède bien un point singulier à l'origine correspondant à  $t = 0$ . Le développement limité

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = t^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \epsilon(t)$$

montre qu'on a affaire à un *point de rebroussement de première espèce*. En effet, les vecteurs  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont non colinéaires, et les puissances de  $t$ , 2 et 3, ne sont pas de même parité. La courbe  $C$  possède donc à l'origine une demi-tangente orientée suivant  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ . On trouvera ci-dessous le tracé de la courbe entière.



2. Par définition, la circulation de  $w$  le long de  $C$  vaut

$$\begin{aligned} \text{circ}(w, C) &= \int_0^{2\pi} w(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^4(t) dt \\ &= \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. On calcule

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = -1.$$

On remarque que l'orientation du bord du domaine  $D$  entouré par  $C$  est l'opposée de l'orientation

de  $C$ . D'après la formule de Green-Riemann,

$$\begin{aligned} \text{circ}(w, C) &= -\text{circ}(w, \partial D) \\ &= -\iint_D (-1) \, dx \, dy \\ &= \text{aire}(D), \end{aligned}$$

donc l'aire du domaine entouré par  $C$  vaut  $\frac{3\pi}{4}$ .

## II

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 18. \end{aligned}$$

On a retranché 2 fois la dernière colonne à la première, puis on a développé suivant la 3ème ligne. Ensuite, on a ajouté la 3ème colonne à la 2ème, puis on a développé suivant la 2ème ligne.

## III

**1.** Le polynôme caractéristique de  $u_a$  est  $X^2 - 2aX + 1$ . Son discriminant vaut  $4(a^2 - 1)$ . Si  $a > 1$  ou si  $a < -1$ , le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes, donc  $u_a$  possède deux valeurs propres réelles distinctes, donc  $u_a$  est diagonalisable. Si  $-1 < a < 1$ , le polynôme caractéristique possède deux racines complexes non réelles distinctes, donc  $u_a$  est diagonalisable sur  $\mathbf{C}$ . Si  $a = -1$  ou  $a = 1$ ,  $u_a$  possède une valeur propre double  $a$ . Comme la matrice  $A_a$  n'est pas proportionnelle à la matrice unité,  $u_a$  n'est pas diagonalisable. On conclut que  $u_a$  est diagonalisable si et seulement si  $a > 1$  ou si  $a < -1$ .  $u_a$  est diagonalisable sur  $\mathbf{C}$  si et seulement si  $a \neq 1$  et  $a \neq -1$ .

**2.** On suppose que  $a = 1$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, la matrice  $B = A_1 - I$  satisfait  $B^2 = 0$ . La formule du binôme donne, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} A_1^k &= (I + B)^k \\ &= I + kB \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2k & -2k \\ 2k & 1 + 2k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**3.** On suppose que  $a = 5/4$ . Les valeurs propres de  $A_{5/4}$  valent 2 et 1/2. L'espace propre  $E_2$ , défini par le système

$$\begin{aligned} -x - \frac{9}{4}y &= 2x \\ 2x + \frac{7}{2}y &= 2y \end{aligned}$$

est la droite vectorielle d'équation  $4x + 3y = 0$ , de vecteur directeur  $v_1 = (3, -4)$ .

L'espace propre  $E_{1/2}$ , défini par le système

$$\begin{aligned} -x - \frac{9}{4}y &= \frac{1}{2}x \\ 2x + \frac{7}{2}y &= \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

est la droite vectorielle d'équation  $2x + 3y = 0$ , de vecteur directeur  $v_2 = (3, -2)$ .

La matrice  $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$  satisfait donc  $P^{-1}A_{5/4}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

4. On suppose que  $a = 0$ . Les valeurs propres de  $A_0$  valent  $i$  et  $-i$ .

L'espace propre  $E_i$ , défini par le système

$$\begin{aligned} -x - y &= ix \\ 2x + y &= iy \end{aligned}$$

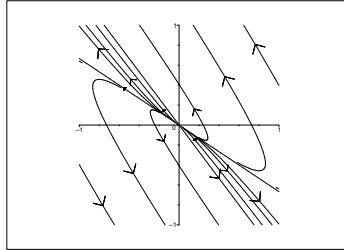
est la droite vectorielle d'équation  $(1 - i)x + y = 0$ , de vecteur directeur  $w = (1, -1 + i)$ .

L'espace propre  $E_{-i}$  est la droite conjuguée, de vecteur directeur  $\bar{w} = (1, -1 - i)$ .

La matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 + i & -1 - i \end{pmatrix}$  satisfait donc  $Q^{-1}A_0Q = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ .

## IV

1. La matrice du système  $(S_a)$  est  $A_a$ . Son polynôme caractéristique est  $X^2 - 2aX + 1$ . Lorsque  $a = 5/4$ , les racines sont 2 et  $1/2$ . Elles sont distinctes et réelles positives, donc  $(S_{5/4})$  est un *noeud non dégénéré répulsif*. Il possède 4 trajectoires rectilignes portées par les droites propres  $E_2$  et  $E_{1/2}$  déjà calculées en III.3, de pentes négatives. Les trajectoires non rectilignes sont des sortes de paraboles tangentes à l'origine à  $E_{1/2}$  et dont la direction asymptotique est donnée par  $E_2$ . Cela donne le dessin suivant.



2. Lorsque  $a > 1$  ou  $a < -1$ , la matrice  $A_a$  possède deux valeurs propres réelles distinctes de même signe (car leur produit vaut 1), donc  $(S_a)$  est un *noeud non dégénéré*.

Lorsque  $a = \pm 1$ , la matrice  $A_a$  est non diagonalisable, donc  $(S_a)$  est un *noeud dégénéré*.

Lorsque  $-1 < a < 0$  ou  $0 < a < 1$ ,  $A_a$  possède deux valeurs propres non réelles et non imaginaires pures, donc  $(S_a)$  est un *foyer*.

Enfin,  $A_0$  possède deux valeurs propres imaginaires pures non nulles, donc  $(S_0)$  est un *centre*.

On conclut que  $(S_a)$  n'est jamais ni un *col*, ni un *soleil*, ce qui exclut les figures (a) et (c).

La figure (e) représente un système qui possède des trajectoires rectilignes contenues dans l'axe des  $x$ . Sa matrice admet donc le vecteur  $(1, 0)$  comme vecteur propre, i.e. sa matrice est triangulaire supérieure. Or la matrice  $A_a$  n'est jamais triangulaire supérieure. On conclut que la figure (e) ne représente aucun des systèmes  $(S_a)$ .