

Feuille d'exercices de mathématiques n°0 (révision)

1. Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$, puis lorsque dans $\mathbf{R}^3$ on utilise à la place de la base canonique la base suivante

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0).$$

2. Soit $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (5, -2, 2), v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que v_1, v_2, v_3 forment une base de $\mathbf{R}^3$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base v_i puis celle de v_i à la base canonique.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice B de f dans la base v_i . Calculer B^n pour tout $n > 0$ puis A^n .

3. Trouver une application linéaire $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $\ker(F)$ soit la droite $\mathbf{R}(1, 1, 1)$ et telle que $F(1, -1, 1) = (0, 1)$. Donner la matrice de F dans la base canonique.

4. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application définie par :

$$f(e_1) = -e_1 - 6e_2 + 9e_3, f(e_2) = 2e_1 + 6e_2 - 6e_3, f(e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3$$

Déterminer une base de $\ker(f)$. Montrer que l'ensemble $E = \{u, f(u) = 2u\}$ est un plan dont on donnera l'équation, une base. Montrer que $\ker(f)$ et E sont supplémentaires. Donner la matrice de f dans une base formée de bases de $\ker(f)$ et de E .

5. Soit $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de f , une base de $\text{im}(f)$ et une base de $\ker(f)$. Même exercice pour les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$