

Feuille d'exercices 1

I. Parmi les applications suivantes lesquelles sont linéaires ? Si oui, déterminer l'image, le noyau pour les applications $f_i, i = 1, \dots, 6$ et dire si l'application est un isomorphisme. ($\mathbf{R}_6[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 6 et $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continument dérivables)

1. $f_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x, y) = x + 2y$
2. $f_2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, f_2(x, y) = (x + 2y, 3x, y)$
3. $f_3 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, f_3(x, y, z) = (z, z - x)$
4. $f_4 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f_4(x, y) = x$
5. $f_5 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, f_5(x, y, z) = xy + z$
6. $f_6 : \mathbf{R}_6[X] \rightarrow \mathbf{R}_6[X], f_6(P) = XP' - P$
7. $f_7 : C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^2, f_7(g) = (g(0), g'(1))$
8. $f_8 : C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}, f_8(g) = \int_{-1}^1 g(t) - g'(t) dt$

II. Trouver une base du noyau et de l'image de l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + z, 2x + y)$. Que peut-on en déduire? Soit E le plan d'équation $2x + y + z = 0$, déterminer $f(E)$.

III. Soient a, b deux paramètres réels. Existe-t-il une ou plusieurs applications linéaires $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telles que $f(1, -2) = (-1, 1), f(3, a) = (-3, b)$?

IV. Justifier l'existence et l'unicité des applications linéaires f, g définies par $f(1, 2) = (3, -1, 5), f(0, 1) = (2, 1, -1)$ et par $g(1, 1, 1) = 3, g(0, 1, -2) = 1, g(0, 0, 1) = -2$.

V. Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = -e_1 - 6e_2 + 9e_3, f(e_2) = 2e_1 + 6e_2 - 6e_3, f(e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3$$

Déterminer une base de $\ker(f)$. Montrer que l'ensemble $E = \{u, f(u) = 2u\}$ est un plan dont on donnera l'équation, une base. Montrer que $\ker(f)$ et E sont supplémentaires. Définir f à l'aide des bases de $\ker(f)$ et de E .

VI. Trouver une application linéaire $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $\ker(F)$ soit la droite $\mathbf{R}(1, 1, 1)$ et telle que $F(1, -1, 1) = (0, 1)$. On définira F dans la base canonique.

VII. Déterminer le rang des matrices suivantes, pour a réel,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a \\ a & 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

VIII. Soit $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de f , une base de $Im(f)$ et une base de $Ker(f)$. Même exercice pour les matrices B et C (où $a = -1$) de l'exercice VII.

IX. Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$, puis dans les bases (on vérifiera que ce sont bien des bases) de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$:

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0), \quad \text{et} \quad t_1 = (1, 1), t_2 = (1, -1)$$

X. Déterminer les matrices inconnues X qui vérifient les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

XI. Soit $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (5, -2, 2), v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que v_1, v_2, v_3 forment une base de $\mathbf{R}^3$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base v_i puis celle de v_i à la base canonique.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice B de f dans la base v_i . Calculer B^n pour tout $n > 0$ puis A^n .

XII. Soient $E = \mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 et $f : E \rightarrow E$ défini par $f(P) = P(X + 1)$. Déterminer la matrice A de f dans la base $1, X, \dots, X^3$, puis A^{-1} .