

Feuille d'exercices de mathématiques n°2

1. Soit a un paramètre réel. On considère les points $A = (1 + a, a)$, $B = (0, 1 + a)$ et $C = (a, 1 - a)$ du plan.

a) A quelle condition les points A , B et C sont-ils alignés ?

b) Quelle est l'aire du parallélogramme dont deux côtés sont AB et AC ? Quelle est l'aire du triangle ABC ?

c) En tournant autour du triangle dans le sens trigonométrique, quel point rencontre-t-on après A ?

d) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Soient $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. Répondre aux questions a), b) et c) en remplaçant ABC par $A'B'C'$.

2. Soit a un paramètre réel. On considère les points $A = (1 + a, a)$, $B = (0, 1 + a)$ et $C = (a, 1 - a)$ et $D = (1, a)$ du plan.

a) A quelle condition le quadrilatère $ABCD$ est-il convexe (i.e. tourne toujours dans le même sens) ?

b) Lorsque c'est le cas, calculer son aire de deux façons différentes en le partageant en triangles.

c) Soient t, u, v, w quatre vecteurs de $\mathbf{R}^2$ tels que $t + u + v + w = 0$. Montrer que

$$\det(t, u) + \det(v, w) = \det(u, v) + \det(w, t).$$

Quel est le lien entre cette propriété et le partage d'un quadrilatère en triangles ?

3. a) Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) En déduire le volume du parallélépipède de $\mathbf{R}^3$ construit sur les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 3, 4)$ et $w = (3, 6, 10)$.

4. Calculer le déterminant

$$D(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{pmatrix}$$

en le factorisant. On montrera qu'il vaut $(a + b + c)^3$.

5. On considère les déterminants de Vandermonde

$$D(a, b, c) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad D(a, b, c, d) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $D(a, b, c)$

b) Montrer que sans changer la valeur de $D(a, b, c, d)$, on peut remplacer sa dernière ligne par $f(a), f(b), f(c), f(d)$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

En choisissant astucieusement f de sorte que la dernière ligne n'ait qu'un seul terme non nul, et en développant, montrer que $D(a, b, c, d) = (d-a)(d-b)(d-c)D(a, b, c)$.

c) En déduire la valeur de $D(a, b, c, d)$. Peut-on généraliser?

d) On considère la courbe γ dans l'espace paramétrée par $t \mapsto \gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. A quelle condition trois points $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ et $\gamma(c)$ de la courbe sont-ils contenus dans un même plan passant par l'origine ?

6. Soit le déterminant

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{pmatrix}.$$

a) Calculer directement $D(\alpha, \beta, \gamma)$

b) En utilisant la formule $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, ramener ce calcul à celui d'un déterminant de Vandermonde.

7. a) Ecrire l'équation du plan P_1 de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(2, 1, -3)$.

b) Ecrire l'équation du plan P_2 de $\mathbf{R}^3$ orthogonal au vecteur $(2, 3, 4)$.

c) Soit P_3 le plan orthogonal au vecteur $V = (\alpha, \beta, \gamma)$. A quelle condition (nécessaire et suffisante) l'intersection des trois plans $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ contient-elle une droite ?

8. Soit a un paramètre réel. Soient $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$ et $C = (3, 4, a)$ trois points de l'espace. Quelle est l'aire du triangle ABC ? A quelle condition les points A , B et C sont-ils alignés ?

9. Donner une équation de l'hyperplan engendré par les vecteurs $v_1 = (0, 1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_3 = (2, 3, 4, 6)$ de $\mathbf{R}^4$.

10. a) Soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice (n, n) dont tous les éléments sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale principale qui valent $1 + x$. Calculer $D_n(x)$ en le factorisant.

Quelles sont les racines de $D_n(x) = 0$ et leur multiplicités ? (on pourra se contenter de traiter les cas $n = 2, 3, 4$).

b) Même question pour le déterminant $\Delta(x)$ de la matrice (n, n) dont tous les éléments sont égaux à x sauf ceux de la diagonale principale qui valent $1 + x$.

Quel est le degré de $\Delta(x)$?

c) Calculer

$$\det \begin{pmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{pmatrix}$$

On pourra effectuer un calcul direct, ou vérifier que c'est un polynôme en x dont on estimera le degré.

11. Calculer le "déterminant circulant"

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

12. Soient

$$D = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } D(x) = \det \begin{pmatrix} 2+x & 3 & 4 \\ 3 & 4+x & 5 \\ 4 & 5 & 6+x \end{pmatrix}.$$

Calculer D et factoriser $D(x)$