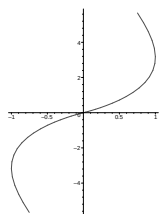


Feuille d'exercices de mathématiques N° 3

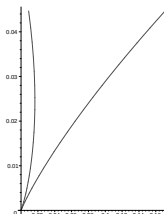
1. Etudier au voisinage de $t = 0$ les courbes suivantes :

- a) $t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ t^2-2t^3 \end{pmatrix}$. b) $t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ t^2+t^7 \end{pmatrix}$. c) $t \mapsto \begin{pmatrix} t-t^3 \\ t^2+t^3+t^4 \end{pmatrix}$.
d) $t \mapsto \begin{pmatrix} t-t^2+t^3 \\ 1-t^3 \end{pmatrix}$. e) $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2+2t^3+t^4+t^5 \\ 1-t^2-2t^3-t^4 \end{pmatrix}$.
f) $t \mapsto \begin{pmatrix} t-2t^4+t^5+t^6\varepsilon(t) \\ t-2t^4+t^6+t^6\varepsilon(t) \end{pmatrix}$, la fonction ε ayant pour limite 0 quand $t \rightarrow 0$.

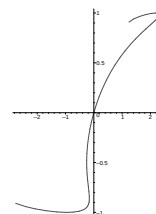
2. On considère les courbes paramétrées définies par $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ 1+\sin^3(t) \end{pmatrix}$, $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 10\tan^4(t) \\ \ln^2(1+t) \end{pmatrix}$, $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t^2+3t^3 \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}$, $\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} \sin^3(t) \\ 2t(1-\cos(t)) \end{pmatrix}$, $\gamma_5(t) = \begin{pmatrix} t+\sin(t^2) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. En raisonnant à l'aide de développements limités, indiquer quelles sont les courbes partiellement représentées par les graphiques ci-dessous.



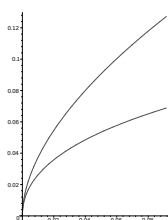
(a)



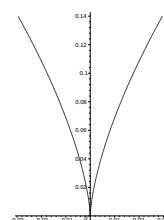
(b)



(c)



(d)

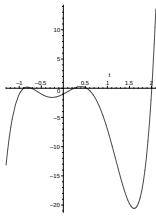


(e)

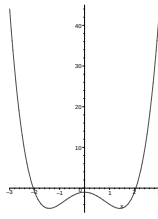
3. On a représenté ci-dessous les graphes des huit polynômes suivants :

$$P_1(x) = x^2 - 1, \quad P_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1, \quad P_3(x) = x^3 - 1, \quad P_4(x) = x^3 - 3x - 1, \\ P_5(x) = (x-2)(3x-2)x(x+1)(3x+1) - 1, \quad P_6(x) = (x-1/2)^2x(x+1) - 1, \quad P_7(x) = x^4 - 1, \\ P_8(x) = x^4 - x^2 - 1.$$

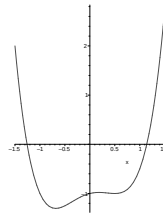
Identifier par des arguments mathématiques les plus simples possibles à quel polynôme correspond chaque graphique.



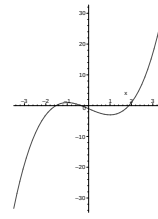
(a)



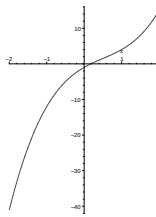
(b)



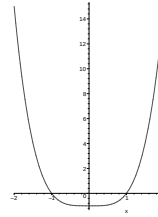
(c)



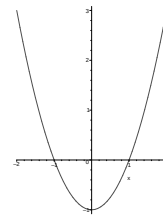
(d)



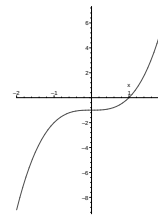
(e)



(f)



(g)



(h)

4. On considère la courbe paramétrée définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ par $t \mapsto \begin{pmatrix} 1/(t-1) + 1/(t+1) + 1/t \\ 1/(t-1) - 4/(t+1) \end{pmatrix}$.

a) Etudier ses branches infinies en déterminant leurs asymptotes.

b) Quand $t \rightarrow \pm\infty$, la courbe admet l'origine pour point limite. Calculer $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ et en déduire la tangente en ce point.

c) Dresser le tableau des variations des coordonnées et tracer la courbe.

5. Etudier et construire la courbe paramétrée définie sur $\mathbf{R}$ par $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 + t \\ 4t^3 + 3t^2 \end{pmatrix}$.

6. Etudier et construire la courbe paramétrée définie sur $\mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ par $t \mapsto \begin{pmatrix} \tan t + \sin t \\ 1/\cos t \end{pmatrix}$.

7. Le graphe de la courbe définie sur $\mathbf{R}$ par $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ est donné par le dessin ci-après.

a) Expliquer pourquoi il s'agit d'une courbe fermée.

b) Expliquer les symétries du graphe, et dresser un tableau de variations simplifié tenant compte de ces faits. Préciser en quels points la courbe touche son cadre, qui est le carré $\max(|x|, |y|) = 1$

c) Les solutions du système $\begin{cases} \cos 3t = \cos 3u \\ \sin 2t = \sin 2u \end{cases}$ pour lesquelles $t \neq u, t \in [0, 2\pi[, u \in [0, 2\pi[$, correspondent aux points où la courbe se recoupe. Repérer ces points par les valeurs de leurs paramètres.

