

Feuille d'exercices de mathématiques n°4

1. Calculer l'intégrale curviligne $\int_c (xy + y^2 - xyz) dx$ sur l'arc de parabole dans $\mathbf{R}^3$ d'équations $\{y = x^2, z = 0\}$ partant de $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et aboutissant en $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_c (x^3 - y^3) dy$ sur le demi-cercle c du plan défini par $\{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, parcouru dans le sens trigonométrique.
3. Calculer l'intégrale curviligne $\int_c (3x^2 - 6xy) dx + (2y + 3xz) dy + (1 - 4xyz^2) dz$ dans les cas suivants.
 - a) c est la courbe paramétrée par $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ pour $t \in [0, 1]$.
 - b) c est la ligne polygonale $ABCD$ où $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - c) c est le segment $[A, D]$ (parcours de A vers D).
4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un point du plan. Montrer que l'intégrale curviligne $\int_A^M 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$ est indépendante du chemin choisi reliant A à M . Calculer cette intégrale.
5. *Folium de Descartes*. C'est la courbe paramétrée définie par $c(t) = \begin{pmatrix} \frac{3t}{1+t^3} \\ \frac{3t^2}{1+t^3} \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Comparer $c(1/t)$ et $c(t)$. Tracer la courbe. Calculer l'aire de la boucle formée par cette courbe.
6. On étudie la courbe c paramétrée sur $[-\pi, \pi]$ par $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ (1 - \cos t) \sin t \end{pmatrix}$.
 - a) La courbe c possède-t-elle une symétrie ?
 - b) En raisonnant à l'aide d'un développement limité, déterminer la nature du point singulier de c et tracer sommairement c au voisinage de ce point, en indiquant le sens de parcours. Tracer la courbe.
 - d) On considère le champ de vecteurs w défini sur $\mathbf{R}^2$ par $w(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer la circulation de w le long de c . Le champ w dérive-t-il d'un potentiel ?
 - e) En utilisant la formule de Green-Riemann, déterminer l'aire du domaine plan délimité par la courbe c .
7. On étudie la courbe c paramétrée par $c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - t^5 \end{pmatrix}$ pour $t \in [-1, 1]$.
 - a) La courbe c admet-elle une tangente, une demi-tangente à l'origine ? Possède-t-elle une symétrie ?
 - b) Tracer la courbe, en indiquant le sens de parcours et les tangentes aux extrémités. On donne $\sqrt{15} = 3.87\dots$
 - c) Calculer la circulation le long de c du champ de vecteurs w défini sur $\mathbf{R}^2$ par $w(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ 1 + x \end{pmatrix}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?
8. En utilisant la formule de Green-Riemann, redémontrer la formule pour l'aire d'un triangle.

9. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'intégrale curviligne $\int_{\partial D} e^y \sin x \, dx + e^{-x} \sin y \, dy$ où ∂D est le bord du rectangle défini par les inégalités $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

10. Soit K le cône de révolution d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Paramétrer K et calculer l'aire de la partie de K située entre deux plans horizontaux.

11. Soit S la sphère unité et C le cylindre vertical circonscrit à S (son équation cartésienne est $x^2 + y^2 = 1$). On définit une projection de S (privée des deux pôles) vers C comme suit : chaque point p de S est envoyé sur le point q de C tel que la droite pq coupe orthogonalement l'axe Oz . Montrer que cette projection préserve les aires.

12. De nouveau, soit S la sphère unité et C le cylindre vertical circonscrit à S . On étudie une autre projection, qui consiste à envoyer chaque point p de S sur le point q de C tel que l'origine, p et q soient alignés. Vérifier que le 30ème parallèle partage l'hémisphère nord en deux parties d'aires égales. Calculer l'aire sur le planisphère de la région de la terre comprise entre l'équateur et le 30ème parallèle de latitude nord. Montrer qu'au delà du 60ème parallèle, la projection étudiée augmente les aires d'un facteur au moins égal à 8.

13. Soient a, b, c trois réels strictement positifs. En s'inspirant des coordonnées sphériques, paramétrer l'ellipsoïde E d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Calculer le flux à travers E du champ de vecteurs $w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. En déduire le volume de E .

14. Soit a un réel. On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par

$$w_a(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a le champ de vecteurs w_a dérive-t-il d'un potentiel ? Montrer que pour tout a , la circulation de w_a le long de toute courbe contenue dans un plan horizontal est nulle.

15. Calculer le flux à travers la sphère unité du champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ zx^2 + zy^2 + z^3 \end{pmatrix}.$$

Calculer la divergence de w et l'intégrale de la divergence sur la boule unité. Comparer.

16. Soit A une matrice 3×3 . Montrer que le champ de vecteurs linéaire $w_A(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a un rotationnel nul si et seulement si la matrice A est symétrique. Dans ce cas, donner un potentiel dont dérive w_A .