

## Feuille d'exercices N°4

I. Calculer les intégrales curvilignes  $\int_{\Gamma} \omega$  suivantes:

- 1)  $\omega = (x + y)dx + (x - y)dy$  où  $\Gamma$  est l'arc de cercle  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  pour  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- 2)  $\omega = xydx + (x^2 - y)dy$  où  $\Gamma$  est le segment de droite joignant le point  $(0, 1)$  à  $(1, 0)$ .
- 3)  $\omega = xydx + (x + y)dy$  où  $\Gamma$  est l'arc de la parabole d'équation  $y = x^2$  pour  $-2 \leq x \leq 2$ .
- 4)  $\omega = (3x^2 - 6xy)dx + (2y + 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz$  dans chacun des trois cas où  $\Gamma$  est
  - a) la courbe paramétrée par  $t \mapsto (t, t^2, t^3)$  pour  $t \in [0, 1]$ .
  - b) la ligne polygonale  $ABCD$ , où  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
  - c) le segment  $[A, D]$  parcouru de  $A$  vers  $D$ .

II. Soit  $\omega = 2xydx + (x^2 - y^2)dy$ . Montrer que  $\int_{\Gamma} \omega$  est indépendante du chemin  $\Gamma$  joignant le point  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  au point  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ; calculer cette intégrale.

III. Tracer la courbe d'équation polaire  $r = a(1 + \cos t)$ . Calculer son aire en utilisant la formule de Green-Riemann.

IV. a) Montrer que  $x = (1 + \cos t)^3$ ,  $y = \sin^3 t$  est un paramétrage de la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ .

V. *Folium de Descartes* On considère la courbe paramétrée par  $x(t) = \frac{3t}{t^3+1}$ ,  $y(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}$  pour  $t \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[$ .

Comparer les points correspondants à  $t$  et  $\frac{1}{t}$ . Tracer la courbe. Que peut-on dire du point  $O = (0, 0)$ ?

Calculer l'aire de la boucle formée par cette courbe.

VI. On considère la courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = t^3 - t^5$  pour  $t \in [-1, 1]$ .

- a) Que peut-on dire de courbe au voisinage de l'origine. Quelles sont ses symétries ?
- b) Tracer  $\mathcal{C}$ .
- c) Calculer  $\int_{\mathcal{C}} ydx + (1 + x)dy$ . Pouvaient-on prévoir le résultat?

VII. Redémontrer la formule donnant l'aire d'un triangle à l'aide de la formule de Green-Riemann.

IX. Calculer de deux façons, en utilisant la formule de Green-Riemann puis directement, l'intégrale  $\int_{\partial D} \omega$  où  $\omega = e^y \sin x dx + e^{-x} \sin y dy$  et  $\partial D$  est le bord du rectangle  $D = [a, b] \times [c, d]$ .