

Feuille d'exercices de Mathématiques n° 5

1. Soit $\mathbf{K}$ la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Décrire géométriquement $\mathbf{K}$, la paramétrer et calculer l'aire de la partie de $\mathbf{K}$ située entre deux plans horizontaux.

2. Soit $0 < r < c$ et Γ le cercle de $\mathbf{R}^3$ centré en $(c, 0, 0)$ de rayon r , situé dans le plan $y = 0$. On considère la surface $\mathbf{T}$ engendrée par la rotation de Γ autour de l'axe Oz . Paramétrer $\mathbf{T}$ et calculer son aire.

3. Soit $\mathbf{S}$ la sphère unité et $\mathbf{C}$ le cylindre vertical circonscrit à $\mathbf{S}$ (son équation cartésienne est $x^2 + y^2 = 1$). On définit une projection de $\mathbf{S}$ (privée de ses deux pôles) vers $\mathbf{C}$ comme suit : chaque point $\mathbf{p}$ de $\mathbf{S}$ est envoyé sur le point $\mathbf{q}$ de $\mathbf{C}$ tel que la droite $\mathbf{pq}$ coupe orthogonalement l'axe Oz . Montrer que cette projection préserve les aires.

4. Soient a, b et c trois réels strictement positifs. En s'inspirant des coordonnées sphériques, paramétrer l'ellipsoïde $\mathbf{E}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Calculer le flux à travers

$\mathbf{E}$ du champ de vecteurs $\mathbf{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. En déduire le volume de $\mathbf{E}$.

5. Calculer le flux à travers la sphère unité du champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$\mathbf{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ zx^2 + zy^2 + z^3 \end{pmatrix}$$

Calculer la divergence de $\mathbf{w}$ et l'intégrale de la divergence sur la boule unité. Comparer.

6. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 et $U : \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$U(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

On pose $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Soient $0 < a < b$ et $\mathbf{K}$ la région de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2.$$

Calculer l'intégrale de la fonction ΔU sur $\mathbf{K}$:

- directement
- en appliquant la formule d'Ostrogradsky.

7. Soit C le cylindre paramétré par $(u, v) \rightarrow (\cos u, \sin u, v)$ pour $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Soit $\mathbf{w}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$\mathbf{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ z^2 \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

- Calculer le flux de $\mathbf{w}$ à travers C .
- Calculer la divergence de $\mathbf{w}$. Quelle est son intégrale sur le cylindre plein K ?
- Décrire le bord de K en précisant les orientations.
- En utilisant la formule d'Ostrogradsky, en déduire le flux de $\mathbf{w}$ à travers le disque Δ d'axe Oz, de rayon 1, situé dans le plan $z = 1$, orienté vers le haut.

8. Soit a un réel. On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$\mathbf{w}_a(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a le champ de vecteurs $\mathbf{w}_a$ dérive-t-il d'un potentiel ?

Montrer que pour tout a , la circulation de $\mathbf{w}_a$ le long de toute courbe contenue dans un plan horizontal est nulle.

9. Soit A une matrice 3×3 . Montrer que le champ de vecteurs :

$$\mathbf{w}_A(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a un rotationnel nul si et seulement si la matrice A est symétrique. Dans ce cas, donner un potentiel dont dérive $\mathbf{w}_A$.