

PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
27 novembre 2001, durée 3 heures
Les documents sont interdits

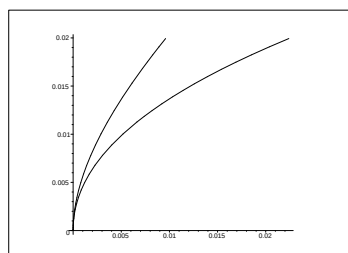
I

On considère les paramétrisations

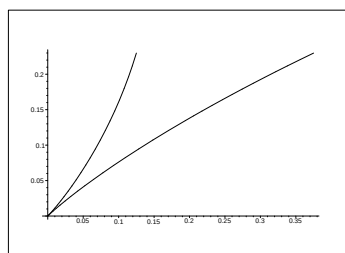
$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x_1(t) = t^3 - t^5 \\ y_1(t) = \sin^3 t \end{cases}, \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} x_2(t) = 10t^4 + 20t^5 \\ y_2(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad \gamma_3(t) = \begin{cases} x_3(t) = -\sin^3 t \\ y_3(t) = \sin^2 t \cos t \end{cases},$$

$$\gamma_4(t) = \begin{cases} x_4(t) = t^2 + t^3 \\ y_4(t) = \sin^2 t \end{cases}, \quad \gamma_5(t) = \begin{cases} x_5(t) = 1 - \cos t \\ y_5(t) = t - \sin t \end{cases}.$$

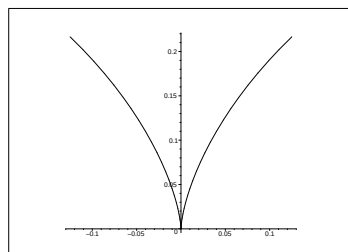
1. En raisonnant à l'aide de développements limités, dire lesquelles, parmi ces paramétrisations, correspondent aux courbes c_1 , c_2 , c_3 et c_4 partiellement représentées ci-dessous.



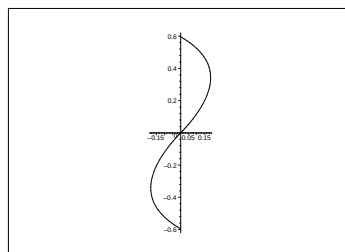
c_1



c_2



c_3



c_4

On s'intéresse désormais à la courbe fermée c de paramétrisation γ_3 , pour $t \in [0, \pi]$ (soit une demi-période), et au champ de vecteurs $w(x, y) = (2y + 3x, y^2)$. On notera $\theta_0 = \arccos(1/\sqrt{3}) = 0.61\dots$

2. Etudier les variations des fonctions x_3 et y_3 et tracer la courbe c , en indiquant le sens de parcours. Justifier les symétries constatées.
3. Montrer que $\text{circulation}(w, c) = \int_c 2y \, dx$.
4. Calculer la circulation de w le long de c (on donne $\int_0^\pi \cos^4 \theta \, d\theta = 3\pi/8$ et $\int_0^\pi \cos^6 \theta \, d\theta = 5\pi/16$).

5. Quelle est l'aire entourée par la courbe c ?

II

Soit a un paramètre réel. On pose $u_1 = (a, a, a)$, $u_2 = (1+a, 2a, 3-a)$ et $u_3 = (1-a, 2+a, -4a)$.

1. Pour quelles valeurs de a les vecteurs u_1 et u_2 sont-ils linéairement indépendants ?
2. Quel est le volume du parallélépipède formé sur u_1 , u_2 et u_3 ? Pour quelles valeurs de a (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

On pose $v_1 = (a, a, a, 1)$, $v_2 = (1+a, 2a, 3-a, 0)$, $v_3 = (1-a, 2+a, -4a, -2)$.

3. Sans calculs supplémentaires, montrer que si $a \neq 0, 1, -1$, alors v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants. Donner une équation de l'hyperplan qu'ils engendrent.
4. Pour quelles valeurs de a les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont-ils linéairement indépendants ? Trouver un vecteur v_4 indépendant de a tel que pour tout $a \neq -1$, (v_1, v_2, v_3, v_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

III

On calcule le flux de matière à travers une demi-sphère placée dans un courant laminaire.

1. Ecrire la paramétrisation de la sphère unité par la latitude θ et la longitude ϕ . Quel domaine (en θ et ϕ) doit-on choisir pour décrire l'hémisphère nord ? Quel choix de normale correspond à cette paramétrisation ?
2. On fixe un réel $\psi \in [0, \pi/2]$. Calculer le flux F du champ de vecteurs constant $w(x, y, z) = (\cos \psi, 0, \sin \psi)$ à travers l'hémisphère nord orienté par la normale rentrante.
3. Etant donné un vecteur constant $u = (a, b, c)$, calculer le rotationnel du champ de vecteurs défini par

$$v(x, y, z) = u \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Déterminer v de sorte que $\text{rot}(v) = w$. En déduire une expression du flux F comme une intégrale curviligne le long de l'équateur. Comment doit-on orienter l'équateur pour cela ? Le vérifier en calculant directement la circulation de v le long de l'équateur.

CORRIGÉ DU PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
27 novembre 2001, durée 3 heures

I

1. Pour chaque courbe, le point singulier est à l'origine. Pour chaque paramétrisation, il y a un point singulier en $t = 0$. Pour trouver si la courbe correspondante présente à l'origine une tangente ou une demi-tangente, on calcule un développement limité de chaque paramétrisation.

$$\gamma_1(t) = t^3(1, 1) + t^5(-1, -\frac{1}{2}) + t^5\epsilon(t), \quad \gamma_2(t) = t^2(0, \frac{1}{2}) + t^4(10, -\frac{1}{24}) + t^4\epsilon(t),$$

$$\gamma_3(t) = t^2(0, 1) + t^3(-1, 0) + t^3\epsilon(t), \quad \gamma_4(t) = t^2(1, 1) + t^3(1, 0) + t^3\epsilon(t),$$

$$\gamma_5(t) = t^2(\frac{1}{2}, 0) + t^3(0, \frac{1}{6}) + t^3\epsilon(t).$$

Il y a demi-tangente lorsque l'exposant du terme dominant est pair. C'est le cas pour γ_2 , γ_3 , γ_4 et γ_5 . On en déduit que la courbe c_4 (tangente de vecteur directeur $(1, 1)$) correspond à γ_1 .

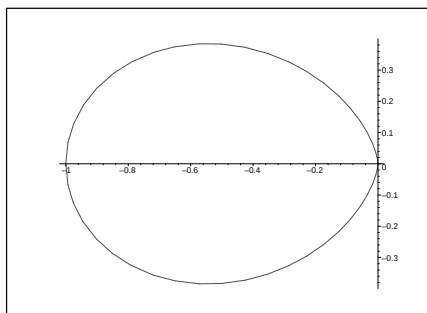
Le vecteur directeur de la demi-tangente est $(1/2, 0)$ pour γ_5 , cela ne correspond à aucune des courbes. Il vaut $(1, 1)$ pour γ_4 , qui correspond donc à c_2 .

Il reste à départager γ_2 et γ_3 . Le développement limité à l'ordre 3 de γ_3 montre que la courbe correspondante présente un rebroussement de première espèce. Il s'agit donc de c_3 . Quand à γ_2 , elle présente un rebroussement de deuxième espèce, c'est c_1 .

2. On calcule $x'_3(t) = -3\sin^2 t \cos t$, et $y'_3(t) = \sin t(3\cos^2 t - 1)$. D'où le tableau de variations suivant, où on a noté $L = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 0.54...$ et $H = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0.38....$

t	0	θ_0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \theta_0$	π				
$x'_3(t)$	0	-	0	+	0				
$y'_3(t)$		+	0	-	0	+			
$x_3(t)$	0	$\searrow$	$-L$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-L$	$\nearrow$	0
$y_3(t)$	0	$\nearrow$	H	$\searrow$	0	$\searrow$	$-H$	$\nearrow$	0

On obtient la courbe suivante.



La symétrie par rapport à l'axe Ox résulte des relations $x_3(-t) = x_3(t)$ et $y_3(-t) = -y_3(t)$.

3. Par définition, $\text{circulation}(w, c) = \int_c (2y+3x) dx + y^2 dy$. Or la forme différentielle $3x dx + y^2 dy$ est une différentielle totale, $3x dx + y^2 dy = d(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3)$, donc son intégrale sur une courbe fermée est nulle. On conclut que $\text{circulation}(w, c) = \int_c 2y dx$.

4. Par définition,

$$\begin{aligned} \int_c 2y dx &= \int_0^\pi (2 \cos^2 t \sin t)(-3 \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \int_0^\pi -6 \cos^4 t \sin^2 t dt \\ &= -6 \int_0^\pi \cos^4 t dt + 6 \int_0^\pi \cos^6 t dt \\ &= -\frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

5. Notons D le domaine plan entouré par c . D'après la formule de Green-Riemann,

$$\int_c 2y dx = \iint_D -2 dx dy = -2 \text{aire}(D).$$

On conclut que l'aire de D vaut $\frac{3\pi}{16}$.

II

1. On calcule le produit vectoriel

$$u_1 \wedge u_2 = a(a-1) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Celui-ci s'annule si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$. On en déduit que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

2. On peut ou bien calculer le déterminant $\det(u_1, u_2, u_3)$, ou bien le produit scalaire de u_3 avec le produit vectoriel $u_1 \wedge u_2$. On trouve

$$\text{volume} = |a||a-1||a+1|.$$

On conclut que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ si et seulement si $a \notin \{0, 1, -1\}$.

3. Soit $a \neq 0, 1, -1$. Supposons qu'il existe des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. En considérant les trois premières composantes des v_i (i.e. la projection sur un sous-espace vectoriel), on trouve que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. Comme (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On conclut que v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants.

Pour trouver une équation de l'hyperplan qu'ils engendrent, on développe suivant la première colonne le déterminant

$$\det(X, v_1, v_2, v_3)$$

où $X = (x, y, z, t)$ est un vecteur inconnu. On trouve l'équation

$$(a+1)((a+6)x + (a+3)y + (a+2)z - a(a-1)t) = 0.$$

4. On sait que v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants si et seulement si l'un des coefficients de l'équation obtenue est non nul. Par conséquent, v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a \neq -1$.

A x, y, z, t fixés, le vecteur X est dans l'hyperplan engendré par v_1, v_2 et v_3 si et seulement si a est solution d'une équation du troisième degré. Il suffit de s'arranger pour que cette équation n'ait pas de solution réelle autre que -1 . On pose par exemple $v_4 = (1, 0, 0, -1)$, de sorte que

$$\det(v_4, v_1, v_2, v_3) = (a + 1)(a^2 + 6)$$

ne s'annule qu'en $a = -1$, donc pour tout $a \neq -1$, (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbf{R}^4$.

III

1. La paramétrisation de la sphère unité par la latitude θ et la longitude ϕ est

$$(\theta, \phi) \mapsto s(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Ou bien on le sait par coeur, ou bien on le retrouve en appliquant la rotation d'axe Oz , d'angle ϕ , à la paramétrisation du cercle unité du plan $\{y = 0\}$. L'hémisphère nord N est obtenu lorsque $\theta \in [0, \pi/2]$ et $\phi \in [-\pi, \pi]$. Le vecteur normal associé à cette paramétrisation est $-s(\theta, \phi)$, donc il s'agit de la normale rentrant dans la boule unité.

2. On calcule

$$\det\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}, \frac{\partial s}{\partial \phi}, w\right) = -\cos^2 \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \theta \cos \theta \sin \psi$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{flux}(w, N) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (-\cos^2 \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \theta \cos \theta \sin \psi) d\phi \right) d\theta \\ &= -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \sin \psi d\theta \\ &= -\pi \sin \psi. \end{aligned}$$

3. On calcule

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cy + bz \\ cx - az \\ -bx + ay \end{pmatrix}$$

d'où le rotationnel $\text{rot}(v) = 2u$. On choisit donc $u = \frac{1}{2}(\cos \psi, 0, \sin \psi)$, soit

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin(\psi) y \\ \frac{1}{2} \sin(\psi) x - \frac{1}{2} \cos(\psi) z \\ \frac{1}{2} \cos(\psi) y \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\text{flux}(\text{rot}(v), N) = \text{circulation}(v, \partial N)$$

où ∂N est l'équateur parcouru de telle sorte que l'hémisphère nord soit sur la gauche si on marche à l'intérieur de la sphère. Une paramétrisation compatible avec cette orientation est $t \mapsto (\cos t, -\sin t, 0)$. On vérifie d'ailleurs que

$$\begin{aligned} \text{circulation}(v, \partial N) &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin \psi \sin t \\ \frac{1}{2} \sin \psi \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos \psi \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \sin \psi dt = -\pi \sin \psi. \end{aligned}$$