

PARTIEL DE MATHÉMATIQUES

26 novembre 2002, durée 3h

L'usage des calculatrices est autorisé, mais pas celui de documents

I

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a-1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Donner une équation du plan engendré par u_1 et u_2 . Pour quelles valeurs de a le vecteur $(1, 1, 1)$ appartient-il à ce plan ?

II

Soit f_a l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par

$$f_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+2az-t \\ -ax+ay-az+t \\ 3y+z+t \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice de f_a dans la base canonique.
2. Calculer le déterminant de f_a . Pour quelles valeurs de a l'application f_a est-elle bijective ?
3. On note v_1, v_2, v_3 les images par f_a des vecteurs $(1, 0, -1, 1)$, $(1, 1, 0, -3)$ et $(0, 0, 0, 1)$. Calculer ces vecteurs. Sont-ils linéairement indépendants ?
4. Sans nouveaux calculs, déterminer la dimension du noyau de f_a .

III

On étudie la courbe c paramétrée sur $[-\pi, \pi]$ par

$$c(t) : \begin{cases} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= (1 - \cos t) \sin t, \end{cases}$$

1. La courbe c possède-t-elle une symétrie ?
2. Etudier les variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
3. En raisonnant à l'aide d'un développement limité, déterminer la nature du point singulier de c et tracer sommairement c au voisinage de ce point, en indiquant le sens de parcours.

T.S.V.P.

4. Tracer la courbe. Indiquer le sens de parcours.
5. On considère le champ de vecteurs w défini sur $\mathbf{R}^2$ par $w(x, y) = (y, 0)$. Représenter sur la figure déjà utilisée en 4 les valeurs de w aux points $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, et $(1, -1)$.
6. Calculer la circulation de w le long de c . Le champ w dérive-t-il d'un potentiel ?
7. En utilisant la formule de Green-Riemann, déterminer l'aire du domaine plan délimité par la courbe c .

IV

Soit C le cylindre droit d'axe Oz de rayon 1 et de hauteur 1, paramétré par $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ pour $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 1]$. Soit w le champ de vecteurs w défini sur $\mathbf{R}^3$ par

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ z^2 \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le flux de w à travers C .
2. Calculer la divergence de w . Quelle est son intégrale sur le cylindre plein

$$K = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} ?$$

3. Décrire le bord de K en précisant les orientations.
4. En utilisant la formule de Green-Ostrogradsky, en déduire le flux de w à travers le disque Δ d'axe Oz , de rayon 1, situé dans le plan $\{z = 1\}$, orienté vers le haut.

CORRIGÉ DU PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
26 novembre 2002, durée 3h

I

On développe le déterminant

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -2a-1 & 4 \\ z & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

suivant la première colonne. On trouve l'équation

$$(6a-1)x + 2y + (4a+2)z = 0.$$

Le vecteur $(1, 1, 1)$ est dans le plan engendré par u_1 et u_2 si et seulement si il vérifie l'équation, ce qui donne $6a - 1 + 2 + 4a + 2 = 0$, soit $a = -3/10$.

II

1. La matrice de f_a est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & -1 \\ -a & a & -a & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En effectuant l'opération élémentaire ($L_3 \rightarrow L_3 + aL_1$ (i.e. en ajoutant a fois la première ligne à la troisième), on est ramené au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & -1 \\ 0 & 2a & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

qu'on développe suivant la première colonne. Dans le déterminant 3×3 obtenu, on effectue $L_2 \rightarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \rightarrow L_3 + L_1$ avant de développer suivant la dernière colonne. On obtient

$$\det f_a = -(2a-1)^2.$$

On conclut que f_a est bijective si et seulement si $a \neq \frac{1}{2}$.

3. On calcule

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a-1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si, dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2a-1 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

des composantes de ces vecteurs, on raye la 2ème ligne, on trouve une matrice carrée

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut $-2 \neq 0$, donc le rang de la matrice vaut au moins 3. On conclut que v_1 , v_2 et v_3 sont linéairement indépendants.

4. Lorsque $a \neq 1/2$, f_a est bijective, donc son noyau est $\{0\}$. Si $a = 1/2$, f_a n'est pas bijective, donc son rang vaut au plus 3. D'après 3., son image contient 3 vecteurs indépendants, donc le rang vaut 3. Le théorème noyau-image donne $\dim \text{Ker}(f_a) = 1$.

III

1. La fonction $t \mapsto x(t)$ est paire, la fonction $t \mapsto y(t)$ est impaire. Par conséquent, quand on change t en $-t$, l'abscisse ne change pas alors que l'ordonnée change de signe. Le point $c(-t)$ est donc le symétrique de $c(t)$ par rapport à l'axe des x . La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x .

2. Grâce à la symétrie, on étudie les variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ seulement sur l'intervalle $[0, \pi]$.

t	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$x'(t)$	0	-	0
$y'(t)$	0	+	0
$x(t)$	1	$\searrow$ $-\frac{1}{2}$	$\searrow$ -1
$y(t)$	0	$\nearrow$ $\frac{3\sqrt{4}}{4}$	$\searrow$ 0

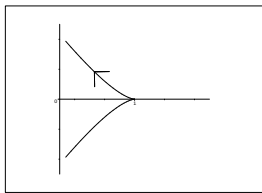
3. Il y a un point singulier en $t = 0$. On développe à l'ordre 3,

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + t^3\epsilon(t), \quad y(t) = \frac{1}{2}t^3 + t^3\epsilon(t).$$

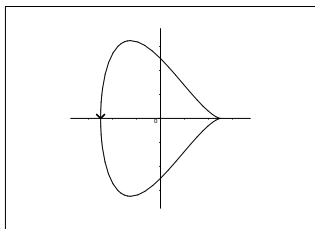
Autrement dit,

$$c(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t^3\epsilon(t),$$

où les vecteurs $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. On conclut que le point singulier est un point de rebroussement de première espèce, avec une demi-tangente orientée suivant $(-1, 0)$. La courbe est parcourue dans le sens des y croissants, car y est une fonction croissante de t .



4. et 5. On place les points à tangente horizontale ou verticale, le point singulier avec sa demi-tangente, et on obtient le tracé suivant.



6.

$$\begin{aligned}
 \text{Circ}(w, c) &= \int_c y \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin t (-\sin t) \, dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{2\pi} \\
 &= -\pi.
 \end{aligned}$$

La circulation de w le long d'une courbe fermée n'étant pas nulle, w ne dérive pas d'un potentiel.

7. Posons $\alpha = y \, dx$. Alors

$$\text{Circ}(w, c) = \int_c \alpha.$$

On calcule $d\alpha = -dx \, dy$. On remarque que l'orientation de c est bien celle du bord du domaine D qu'elle délimite.

D'après la formule de Green-Riemann,

$$\int_c \alpha = \iint_D d\alpha = -\text{aire}(D)$$

donc l'aire de D vaut π .

IV

1. Le flux de w à travers le cylindre C est l'intégrale sur $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ de

$$\begin{aligned}
 \det(w, \frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}) &= \det \begin{pmatrix} \cos u + \sin^2 u & -\sin u & 0 \\ v^2 & \cos u & 0 \\ v(\cos^2 u + \sin^2 u) & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \cos^2 u + \cos u \sin^2 u + v^2 \sin u.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Flux(w, C) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^2 u + \cos u \sin^2 u + v^2 \sin u) du dv \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2 u + \cos u \sin^2 u + \frac{1}{3} \sin u) du \\
&= [\frac{1}{2}u + \frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{3} \sin^3 u - \frac{1}{3} \cos u]_0^{2\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

2. La divergence de w vaut $div(w) = 1 + x^2 + y^2$. Notons D le disque unité dans le plan.

$$\begin{aligned}
\iiint_K div(w) dx dy dz &= \iint_D (1 + x^2 + y^2) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + r^2) r d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 (1 + r^2) r dr \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Le bord ∂K est la réunion de C , de Δ et du disque unité Δ' situé dans le plan $\{z = 0\}$. L'orientation de C est bien celle utilisée dans la question 1, la normale sortante de K le long de Δ est tournée vers le haut. la normale sortante de K le long de Δ' est tournée vers le bas.

4. D'après le théorème de Green-Ostrogradsky,

$$\iiint_K div(w) dx dy dz = Flux(w, \partial K).$$

Le long de Δ' , le champ w est tangent à Δ' . Par conséquent, $Flux(w, \Delta') = 0$. On conclut que

$$Flux(w, \Delta) = \frac{3\pi}{2} - Flux(w, C) = \frac{\pi}{2}.$$