

PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
25 novembre 2003, durée 3h
L'usage des calculettes est autorisé, mais pas celui de documents

I

Soit a un paramètre réel. Soient v_1 , v_2 et v_3 les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ suivants,

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur inconnu. A quelle condition v , v_1 , v_2 et v_3 sont-ils linéairement dépendants ?
2. Pour quelles valeurs de a les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 sont-ils linéairement indépendants ?
3. Ecrire l'équation de l'hyperplan H de $\mathbf{R}^4$ engendré par ces vecteurs. Pour quelles valeurs de a le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient-il à H ?

II

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit f_a l'endomorphisme de E qui, à un polynôme Q , associe le polynôme $R = f_a(Q)$ tel que

$$R(X) = Q''(X) + aXQ'(X) + Q(X).$$

1. Ecrire la matrice M de f_a dans la base $(1, X, X^2)$.
2. Pour quelles valeurs de a l'application f_a est-elle bijective ?
3. Quelles sont les valeurs propres de f_a ?

Dans cette question et la suivante, on suppose $a \neq 0$. On note P la matrice dont les colonnes sont les composantes des polynômes 1 , X et $1 + aX^2$ dans la base $(1, X, X^2)$.

4. Montrer que P est inversible. En déduire que $(1, X, 1 + aX^2)$ est une base. Calculer la matrice inverse P^{-1} .
5. Calculer $P^{-1}MP$. Que représente cette matrice ? Que peut on en déduire pour le vecteur $1 + aX^2$? Le vérifier en calculant $f_a(1 + aX^2)$.

III

On s'intéresse à la courbe paramétrée par $t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ \sin(3t) - 3 \sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbf{R}$.

1. Comparer $c(-t)$ et $c(t + \pi)$ à $c(t)$. Quelles symétries présente la courbe c ?
2. Etudier le point singulier correspondant à $t = 0$. Dessiner sommairement la courbe c au voisinage de $c(0)$, en indiquant le sens de parcours.
3. Etudier les variations des coordonnées de c sur $[0, \pi/2]$ et tracer la courbe c en entier.
4. Soit w le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^2$ par $w(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. Calculer la circulation de w le long de c (on donne $\int_0^{2\pi} \cos t \cos(3t) dt = 0$).
5. Quelle est l'aire du domaine D entouré par c ?

IV

1. On considère la paramétrisation suivante de la sphère unité S .

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad (u, v) \mapsto s(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Quel est le vecteur unitaire normal associé à cette paramétrisation ?

2. Soit w le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par $w(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Calculer le flux de w à travers la sphère unité paramétrée comme en 1. En déduire le volume de la boule unité B .

CORRIGÉ DU PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
25 novembre 2003, durée 3h

I

1. Les vecteurs $v =, v_1, v_2$ et v_3 sont linéairement dépendants si et seulement si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x & a & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 & -1 \\ z & 1 & 0 & a \\ t & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

est nul. Les mineurs de taille 3 (déterminants des matrices 3×3 extraites) valent

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a,$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a^3 - 1,$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a + a^2,$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

Le déterminant D vaut donc

$$D = (-1 - a)x + (1 + a^3)y + (a + a^2)z + (1 - a^2)t.$$

On conclut que $v =, v_1, v_2$ et v_3 sont linéairement dépendants si et seulement si $(-1 - a)x + (1 + a^3)y + (a + a^2)z + (1 - a^2)t = 0$.

2. Les quatre coefficients sont nuls simultanément si et seulement si $a = -1$. On conclut que v_1, v_2 et v_3 sont linéairement dépendants si et seulement si $a = -1$.

3. Si $a \neq -1$, l'hyperplan H a pour équation $(-1 - a)x + (1 + a^3)y + (a + a^2)z + (1 - a^2)t = 0$. Une autre équation, obtenue en simplifiant par $1 + a$, est $-x + (1 - a + a^2)y + az + (1 - a)t = 0$.

Le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient à H si et seulement si il satisfait l'équation de H , ce qui

donne

$$-1 - a + 3(1 + a^3) - 2(a + a^2) - 2(1 - a^2) = -3a + 3a^3 = 0.$$

Cela se produit lorsque $a = 0$, $a = 1$ ou $a = -1$. La solution $a = -1$ est à exclure puisque l'hyperplan H n'est pas défini dans ce cas.

II

1. On calcule $f(1) = 1$, $f(X) = (a+1)X$, $f(X^2) = 2 + (2a+1)X^2$. On trouve la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}.$$

2. Le déterminant de f_a vaut $(a+1)(2a+1)$. Par conséquent, f_a est bijective si et seulement si $a \neq -1$ et $a \neq -1/2$.

3. Comme la matrice de f_a est triangulaire, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux 1, $a+1$ et $2a+1$.

4. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Cette matrice triangulaire est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, i.e. si et seulement si $a \neq 0$.

Le calcul donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

5. On calcule

$$MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+2a \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a(2a+1) \end{pmatrix}$$

puis

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+2a \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a(2a+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

$P^{-1}MP$ est la matrice de f_a dans la base $(1, X, 1+aX^2)$. Elle est diagonale. Par conséquent, $1+aX^2$ est un vecteur propre de f_a . On vérifie immédiatement que $f_a(1+aX^2) = (2a+1)(1+aX^2)$.

III

1. On constate que $c(t+2\pi) = c(t)$, donc la courbe est entièrement décrite lorsque t parcourt $[0, 2\pi]$.

Comme $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, le point $c(-t)$ s'obtient à partir de $c(t)$ par une symétrie par rapport à Ox .

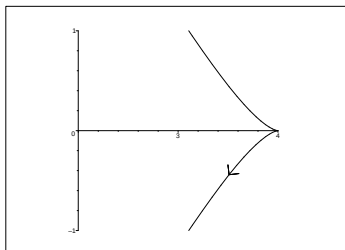
Comme $x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = -y(t)$, le point $c(t+\pi)$ s'obtient à partir de $c(t)$ par une symétrie par rapport à l'origine.

On va donc cantonner l'étude à l'intervalle $[0, \pi/2]$. On complète par une symétrie centrale par rapport à O puis par une symétrie par rapport à Ox .

2. On utilise un développement limité à l'ordre 3. Comme $x(t) = 4 \cos t = 4 - 2t^2 + t^3\epsilon(t)$, $y(t) = \sin(3t) - 3 \sin t = -4t^3 + t^3\epsilon(t)$,

$$c(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t^3\epsilon(t).$$

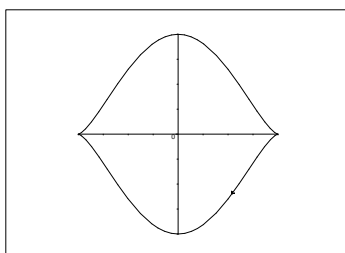
Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ étant linéairement indépendants, il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce, de demi-tangente orientée suivant v_1 . La branche sortante ($t > 0$) se trouve dans le quadrant bordé par v_1 et v_2 , donc en dessous de l'axe Ox . Voir figure.



3. Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, x est décroissante. La dérivée $y'(t) = 3(\cos(3t) - \cos t)$ s'annule si et seulement si $3t = \pm t$ modulo 2π . Cela se produit seulement aux multiples de $\pi/2$. On obtient le tableau suivant.

t	0		$\pi/2$
x'	0	-	-4
x	4	$\searrow$	0
y'	0	-	0
y	0	$\searrow$	-4

On place les points $c(0)$, $c(\pi/2)$ avec leurs tangentes, et on obtient le tracé.



4. On calcule

$$\begin{aligned}
 \text{circ}(w, c) &= \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 \cos(t)(3 \cos(3t) - 3 \cos t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 12 \cos(t) \cos(3t) dt - \int_0^{2\pi} 12 \cos^2 t dt \\
 &= -12\pi.
 \end{aligned}$$

5. Par définition,

$$\text{circ}(w, c) = \int_c x dy.$$

On pose donc $\alpha = x dy$. On remarque que $d\alpha = dx dy$.

La courbe c est orientée en sens inverse du bord du domaine D . La formule de Green-Riemann

donne

$$\begin{aligned}
aire(D) &= \iint_D dx dy \\
&= \iint_D d\alpha \\
&= \int_{\partial D} \alpha \\
&= - \int_c \alpha \\
&= -circ(w, c) \\
&= 12\pi.
\end{aligned}$$

IV

1. On considère la paramétrisation suivante de la sphère unité.

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Quel est le vecteur unitaire normal associé à cette paramétrisation ? On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} = -\cos(u)s(u, v).$$

Comme $\cos u > 0$, la normale unitaire est $-s(u, v)$.

2. On calcule le produit scalaire de $w(s(u, v))$ avec la normale,

$$w(s(u, v)) \cdot (-s(u, v)) = -\sin^2 u.$$

Alors

$$\begin{aligned}
Flux(w, S) &= \iint_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]} -\sin^2 u \cos u \, du \, dv \\
&= 2\pi \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} -\sin^2 u \cos u \, du \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \cos u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{div}(w) = 1$, la formule de Green-Ostrogradsky donne

$$\begin{aligned}
 \operatorname{volume}(B) &= \iiint_B dx \, dy \, dz \\
 &= \iiint_B \operatorname{div}(w) \, dx \, dy \, dz \\
 &= \operatorname{Flux}(w, \partial B) \\
 &= -\operatorname{Flux}(w, S) \\
 &= \frac{4\pi}{3},
 \end{aligned}$$

où le changement de signe est dû au fait que l'orientation de S , donnée par la normale rentrante, est l'opposé de l'orientation induite par la boule.