

PARTIEL DE MATHÉMATIQUES

9 novembre 2004, durée 3h

L'usage des calculatrices est autorisé, mais pas celui de documents

I

Soit a un paramètre réel. Soient v_1 , v_2 et v_3 les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants,

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Soient u_1 , u_2 et u_3 les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ suivants,

$$u_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'aire du parallélogramme formé sur v_1 et v_2 et le volume du parallélépipède formé sur v_1 , v_2 et v_3 .
2. Pour quelles valeurs de a les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 sont-ils linéairement indépendants ?
3. Pour quelles valeurs de a les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 sont-ils linéairement indépendants ?
4. Lorsque c'est le cas, écrire l'équation de l'hyperplan H de $\mathbf{R}^4$ engendré par u_1 , u_2 et u_3 . Pour quelles valeurs de a le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient-il à H ?

II

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + xy + y^2 + 3}$.

1. Vérifier que le dénominateur de f ne s'annule jamais.
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Déterminer les points (x, y) où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément.
3. On pose $g = \frac{1}{f}$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ en $(1, -2)$. Pouvaient-on prévoir le résultat ?
4. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de g en $(1, -2)$. $(1, -2)$ est-il un maximum local de g ? Que peut-on en déduire pour f ?

III

Soit a un paramètre réel. On s'intéresse aux courbes paramétrées par $t \mapsto c_a(t) = \begin{pmatrix} t^5 - t^3 \\ (t^2 - a)^2 \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbf{R}$.

1. Quelle symétrie présentent les courbes c_a ?
2. Etudier le point singulier correspondant à $t = 0$. Dessiner sommairement les courbes c_1 , et c_0 et c_{-1} au voisinage de $c(0)$, en indiquant le sens de parcours.
3. Etudier la branche infinie de c_1 correspondant à $t = +\infty$.
4. On note γ_a la portion de la courbe c_a parcourue lorsque t varie entre -1 et 1 . Calculer $\int_{\gamma_a} y \, dx$.
5. Quelle est l'aire du domaine D_a entouré par γ_a ?

IV

On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^2$ par $w(x, y) = \begin{pmatrix} 9x^3 + 3xy^2 \\ 3x^2y + y^3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la circulation de w le long du cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. w dérive-t-il d'un potentiel ?
2. Calculer la circulation de w le long de l'ellipse paramétrée par $t \mapsto e(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sqrt{3} \sin t \end{pmatrix}$, pour $t \in [0, 2\pi]$. Que vaut la fonction de t à intégrer ? Comment expliquer le phénomène observé ?

CORRIGÉ DU PARTIEL DE MATHÉMATIQUES
9 novembre 2004, durée 3h

I

1. On calcule le produit vectoriel

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 1-a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

L'aire du parallélogramme formé sur v_1 et v_2 vaut

$$\|v_1 \wedge v_2\| = \sqrt{a^2 + (1-a)^2 + a^4}.$$

Le volume du parallélépipède formé sur v_1 , v_2 et v_3 est la valeur absolue du déterminant $|\det(v_1, v_2, v_3)|$.

Or $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a$, donc le volume vaut $|a^3 - a|$.

2. Les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 sont linéairement dépendants si et seulement si leur déterminant est nul, i.e. si et seulement si $a = 0$, $a = 1$ ou $a = -1$.

3. Les vecteurs u_1 , u_2 et u_3 sont linéairement dépendants si et seulement si les quatre mineurs de taille 3 (déterminants des matrices 3×3 extraites) de la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ sont nuls. Le

premier a été calculé à la question 2, il vaut $a^3 - a$, il ne s'annule que si $a = -1$, $a = 0$ ou $a = 1$.

Si $a = -1$, $u_1 = -u_3$ donc u_1 , u_2 et u_3 sont linéairement dépendants.

Si $a = 0$, le troisième mineur $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ est non nul, donc u_1 , u_2 et u_3 sont linéairement indépendants.

Si $a = 1$, $v_1 = v_3$ donc u_1 , u_2 et u_3 sont linéairement dépendants.

On conclut que u_1 , u_2 et u_3 sont linéairement dépendants si et seulement si $a = 1$ ou $a = -1$.

4. On suppose que $a \neq -1$ et $a \neq 1$. Alors l'hyperplan H a pour équation $\begin{vmatrix} x & a & 1 & 1 \\ y & 0 & a & 0 \\ z & 1 & 1 & a \\ t & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$.

On calcule

$$\begin{vmatrix} x & a & 1 & 1 \\ y & 0 & a & 0 \\ z & 1 & 1 & a \\ t & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ = -y(a^2 - 1) + za(a^2 - 1) - ta(a^2 - 1).$$

Une autre équation est $-y + az - at = 0$. Le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient à H si et seulement s'il satisfait à l'équation de H , ce qui donne

$$-1 - a + 2a = a - 1 = 0.$$

Cela se produit lorsque $a = 1$, mais cette solution est à exclure puisque l'hyperplan H n'est pas défini dans ce cas.

II

1. Le discriminant du trinôme $z^2 + z + 1$ vaut -3 . Comme il est strictement négatif, le trinôme est toujours positif. On conclut que pour tout (x, y) , $x^2 + xy + y^2 \geq 0$. Par conséquent, le dénominateur est $\geq 3 > 0$, et il ne s'annule jamais.

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y(2x + y)}{(x^2 + xy + y^2 + 3)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2 + 3 - y(x + 2y)}{(x^2 + xy + y^2 + 3)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 3}{(x^2 + xy + y^2 + 3)^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ s'annule le long des droites $\{y = 0\}$ et $\{y = -2x\}$. Lorsque $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ ne s'annule pas. Lorsque $y = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, -2x)$ s'annule lorsque $x = -1$ ou $x = 1$. On conclut que les deux dérivées partielles s'annulent simultanément en deux points, $(1, -2)$ et $(-1, 2)$.

3. De $g(x, y) = \frac{x^2+3}{y} + x + y$, on tire

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{y} + 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{x^2 + 3}{y^2} + 1,$$

On constate que $\frac{\partial g}{\partial x}(1, -2) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, -2) = 0$. La formule de dérivation des fonctions composées permettrait de le prévoir. En effet, $g = h \circ f$ où $h(t) = \frac{1}{t}$, donc $\nabla_{(1, -2)} g = h'(f(1, -2)) \nabla_{(1, -2)} f = 0$.

4. On écrit

$$\begin{aligned} g(1 + u, -2 + v) &= \frac{4 + 2u + u^2}{-2 + v} - 1 + u + v \\ &= -2(1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2)(1 - \frac{1}{2}v)^{-1} - 1 + u + v \\ &= -2(1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2)(1 + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}v^2) - 1 + u + v + (u^2 + v^2)\epsilon(u, v) \\ &= -2(1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}uv + \frac{1}{4}v^2) - 1 + u + v + (u^2 + v^2)\epsilon(u, v) \\ &= -3 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}uv - \frac{1}{2}v^2 + (u^2 + v^2)\epsilon(u, v). \end{aligned}$$

On peut aussi calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2\frac{x^2 + 3}{y^3},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, -2) = -1, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -1.$$

Le développement limité de Taylor-Young donne

$$g(1+u, -2+v) = -3 + \frac{1}{2}(-u^2 - uv - v^2) + (u^2 + v^2)\epsilon(u, v).$$

Le discriminant du trinôme $-z^2 - z - 1$ vaut $-3 < 0$ donc $-u^2 - uv - v^2$ est strictement négatif. On conclut que $(1, -2)$ est un maximum local de g , donc un minimum local de f .

III

1. x_a est impaire, y_a est paire. Le point $c(-t)$ est le symétrique de $c(t)$ par rapport à Oy . La courbe c_a est donc symétrique par rapport à Oy .

2. On calcule un développement limité à l'ordre 4 en $t = 0$.

$$c_a(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + t^5 \\ a^2 - 2at^2 + t^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^5 \epsilon(t).$$

Si $a \neq 0$, les coefficients de t^2 et de t^3 sont linéairement indépendants, donc le point singulier est un rebroussement de première espèce, la courbe possède une demi-tangente de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix}$. La courbe sort vers les x négatifs. L'aspect de la courbe dépend du signe de a .

Si $a = 0$, les coefficients de t^3 et de t^4 sont linéairement indépendants, donc le point singulier est un point ordinaire, la courbe possède une tangente de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La courbe sort vers les x négatifs.

$$a = -1$$

$$a = 0$$

$$a = 1$$

3. Lorsque t tend vers $+\infty$, $y_a(t)/x_a(t)$ tend vers 0 mais $y(t)$ tend vers $+\infty$. Par conséquent, la courbe admet une branche parabolique de direction Ox .

4.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_a} y \, dx &= \int_{-1}^1 (t^4 - 2at^2 + a^2)(5t^4 - 3t^2) \, dt \\ &= 2 \int_0^1 (5t^8 - (10a + 3)t^6 + (5a^2 + 6a)t^4 - 3a^2t^2) \, dt \\ &= 2\left(\frac{5}{9} - \frac{10a + 3}{7} + \frac{5a^2 + 6a}{5} - \frac{3a^2}{3}\right) = \frac{16}{63} - \frac{16}{35}a. \end{aligned}$$

5. Soit $\alpha = y dx$. Alors $d\alpha = -dx dy$. Lorsque a est petit, γ_a représente l'orientation opposée à celle du bord de D_a . La formule de Green-Riemann donne

$$\text{aire}(D_a) = \iint_{D_a} dx dy = \iint_{D_a} -d\alpha = - \int_{\partial D_a} \alpha = \int_{\gamma_a} \alpha = \frac{16}{63} - \frac{16}{35}a.$$

Le changement de signe s'explique par le fait que lorsque a augmente, la courbe γ_a se recoupe, et $\int_{\gamma_a} \alpha$ s'interprète comme une aire algébrique.

IV

1. On utilise la paramétrisation $t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, pour $t \in [0, 2\pi]$. Il vient

$$w(c(t)) = \begin{pmatrix} 9 \cos^3 t + 4 \cos t \sin^2 t \\ 3 \cos^2 t \sin t + \sin^3 t \end{pmatrix}, \quad c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

puis

$$w(c(t)) \cdot c'(t) = -6 \cos^3 t \sin t + 2 \cos t \sin^3 t = -4 \cos^3 t \sin t - 2 \cos t \sin t.$$

On linéarise

$$4 \cos^3 t \sin t = \frac{1}{4i} (e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it})(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2} \sin 4t + \sin 2t.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \text{Circ}(w, c) &= \int_0^{2\pi} (-4 \cos^3 t \sin t - 2 \cos t \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin 4t - 3 \sin 2t\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{8} \cos 4t + \frac{3}{2} \cos 2t\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Ce résultat ne prouve pas que w dérive d'un potentiel, mais amène à se poser la question. On vérifie que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 6xy = 0.$$

Comme w est défini sur $\mathbf{R}^2$, qui est convexe, un théorème du cours affirme que w dérive d'un potentiel. En fait, on constate que $w = -\nabla V$ où $V(x, y) = \frac{1}{4}(9x^4 + 6x^2y^2 + y^4) = \frac{1}{4}(3x^2 + y^2)^2$.

2. On calcule

$$w(e(t)) = \begin{pmatrix} 9 \cos t \\ 3\sqrt{3} \sin t \end{pmatrix}, \quad e'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \sqrt{3} \cos t \end{pmatrix},$$

puis $w(e(t)) \cdot e'(t) = 0$. L'intégrande est nul. Cela signifie que le champ de vecteurs w est orthogonal à l'ellipse. C'est parce que l'ellipse est une ligne de niveau de la fonction V .