

Test de mathématiques n° 1 - A préparer en vue du contrôle continu du 8 octobre

Répondre par OUI ou NON et justifier votre réponse par une démonstration ou un résultat du cours énoncé de façon précise, ou un contre-exemple.

1. L'application $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y + z, y + z)$ est surjective.
2. Soit E l'espace des polynômes de degré au plus 2. L'application $f : E \rightarrow E$ définie par $f(P)(X) = XP'(X)$ est injective.
3. Soit E l'espace des polynômes de degré au plus 2. L'application $f : E \rightarrow E$ définie par $f(P)(X) = XP'(X)$ est surjective.
4. L'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, -x + y)$ est de rang 1.
5. Le noyau de l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, -x + y)$ est de dimension 1.
6. L'image de l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, -x + y)$ est de dimension 1.
7. Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, -x + y)$. Alors le vecteur $(1, -1)$ appartient à $\text{im}(f)$.
8. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E . Alors $(f(e_1), \dots, f(e_d))$ est une base de F .
9. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Si $\text{rang}(f) = \dim(E)$, alors f est surjective.
10. Soit a un paramètre réel. Soient $v_1 = (1, a)$ et $v_2 = (-1, 2)$. Alors il existe une application linéaire $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ telle que $f(v_1) = (1, 0)$ et $f(v_2) = (0, 1)$.
11. Soit a un réel. Soit f_a l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Alors $f_a \circ f_a$ est proportionnelle à $\text{id}_{\mathbf{R}^2}$.
12. Soit E l'espace des polynômes de degré au plus 2. La matrice dans la base $(1, X, X^2)$ de l'application $f : E \rightarrow E$ définie par $f(P) = P + P'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
13. L'aire du triangle de sommets $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ et $C = (-1, 2)$ vaut 1.
14. L'application linéaire $f_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ est bijective si et seulement si $a \neq \pm 1$.
15. L'application linéaire $f_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ préserve l'orientation.