

Test de mathématiques n° 2 - A préparer en vue du contrôle continu du 25 octobre

Répondre par OUI ou NON et justifier votre réponse par une démonstration ou un résultat du cours énoncé de façon précise, ou un contre-exemple.

1. L'aire du triangle de sommets $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ et $C = (-1, 2)$ vaut 1.
2. L'application linéaire $f_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ est bijective si et seulement si $a \neq \pm 1$.
3. L'application linéaire $f_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ préserve l'orientation.
4. L'égalité suivante entre déterminants est vraie.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & 1 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix}.$$
5. Soit E l'espace des polynômes de degré au plus 4. L'application $f \in \text{End}(E)$ qui à un polynôme associe sa dérivée a un déterminant nul.
6. L'égalité suivante entre déterminants est vraie.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-1 & -1 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix}.$$
7. L'égalité suivante entre déterminants est vraie.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix}.$$
8. Le déterminant de la somme de deux matrices est la somme de leurs déterminants.
9. Soit A une matrice carrée de taille n . Soit λA la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par λ . Alors $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
10. Le déterminant
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (1-a) & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
 vaut $2a(1-a)$.
11. Le déterminant
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ -a & 2 & (1-a) & 1 \\ 0 & 2a & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
 vaut $-a^2$.
12. Si une matrice carrée a deux colonnes proportionnelles, alors son déterminant est nul.
13. Soient v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Pour montrer que v_1, v_2 et v_3 sont linéairement dépendants, je dois calculer 4 déterminants de taille 3.
14. Soient v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Alors $\det(v_3, v_1, v_2) = -\det(v_1, v_2, v_3)$.