

Test de mathématiques n° 5 - A préparer en vue du contrôle continu du 12 décembre

Répondre par OUI ou NON et justifier votre réponse par une démonstration ou un résultat du cours énoncé de façon précise, ou un contre-exemple.

1. Les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont -2 et -1 .
2. L'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
3. L'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de vecteurs propres.
4. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
5. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
6. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
7. Une matrice 2×2 dont le polynôme caractéristique a une racine double n'est pas diagonalisable.
8. Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, λ une racine réelle du polynôme caractéristique de f . Alors la dimension de l'espace propre E_λ est ≥ 1 .
9. Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, λ une racine de multiplicité m du polynôme caractéristique de f . Alors la dimension de l'espace propre E_λ est égale à m .
10. Un endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ qui satisfait $f \circ f = f - id$ n'admet pas de vecteur propre.
11. Toute matrice M telle que $M^2 - M + 1 = 0$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.
12. Soit A une matrice carrée et P un polynôme. Si $P(A) = 0$, alors P est le polynôme caractéristique de A .
13. Si une matrice M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, alors son polynôme caractéristique n'a que des racines réelles.
14. Soient A et B des matrices carrées. Si $B^2 = 0$, alors $(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B$.
15. Soit A une matrice 2×2 telle que $P_A(x) = (x - 1)^2$. Alors les coefficients de la matrice A^k sont des polynômes en k .
16. Soit (u_n) une suite qui satisfait la relation de récurrence $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$. Alors u_n est un polynôme en n .
17. Les solutions $X(t)$ du système différentiel $X' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$ sont de la forme $X(t) = e^{-2t}v_1 + e^{-t}v_2$ où v_1 et v_2 sont des vecteurs indépendants de t .
18. Les solutions $x(t), y(t)$ du système différentiel $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - y \end{cases}$ sont de la forme $x(t) = ae^{-2t} + be^{-t}$, $y(t) = ce^{-2t} + de^{-t}$ où a, b, c, d sont des constantes.