

RÉVISIONS

Déterminants : la trace

Définition. La *trace* d'une matrice *carrée* est la somme des coefficients diagonaux.

Propriétés.

- $\text{trace}(BA) = \text{trace}(AB)$.
- $\text{trace}(P^{-1}AP) = \text{trace}(A)$. Cela permet de définir la trace d'un endomorphisme.
- La trace apparaît dans le polynôme caractéristique, $\det(xI - A) = x^n - \text{trace}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$. Ca facilite le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 .
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines du polynôme caractéristique, alors $\text{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Si on connaît certaines des valeurs propres, ça permet d'en trouver d'autres.
- Pour une matrice 2×2 à valeurs propres non réelles λ et $\bar{\lambda}$, $\Re(\lambda) = \text{trace}(A)/2$.
- Pour déterminer si un système différentiel homogène de 2 équations du premier ordre est attractif ou répulsif, la trace de la matrice du système joue un rôle.
- Un système différentiel homogène de 2 ou 3 équations du premier ordre peut représenter le mouvement d'un fluide incompressible si et seulement si la trace de sa matrice est nulle.

Exemples

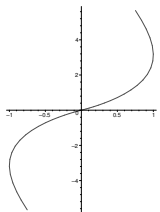
1. Calculer à vue d'oeil le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$?
3. Le système différentiel de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est-il attractif ? répulsif ?

Questions

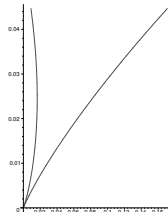
- Le type d'un système différentiel de 2 équations du premier ordre dépend-il seulement de la trace et du déterminant de sa matrice ?
- Quels sont les types de systèmes possibles lorsque la trace de la matrice est nulle ?

Courbes paramétrées

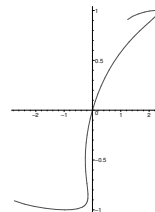
4. On considère les courbes paramétrées définies par $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ 1 + \sin^3(t) \end{pmatrix}$, $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 10 \tan^4(t) \\ \ln^2(1+t) \end{pmatrix}$, $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 3t^3 \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$, $\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} \sin^3(t) \\ 2t(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$, $\gamma_5(t) = \begin{pmatrix} t + \sin(t^2) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. En raisonnant à l'aide de développements limités, indiquer quelles sont les courbes partiellement représentées par les graphiques ci-dessous.



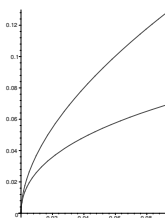
(a)



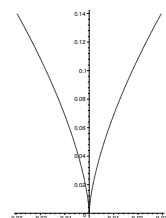
(b)



(c)



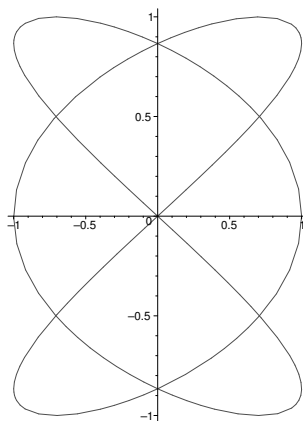
(d)



(e)

5. La courbe paramétrée définie sur $\mathbf{R}$ par $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ est représenté par le dessin ci-après.

- Expliquer pourquoi il s'agit d'une courbe fermée.
- Expliquer les symétries du graphe, et dresser un tableau de variations simplifié tenant compte de ces faits. Préciser en quels points la courbe touche son cadre, qui est le carré $\max(|x|, |y|) = 1$
- Les solutions du système $\begin{cases} \cos 3t = \cos 3u \\ \sin 2t = \sin 2u \end{cases}$ pour lesquelles $t \neq u, t \in [0, 2\pi[, u \in [0, 2\pi[$, correspondent aux points où la courbe se recoupe. Repérer ces points par les valeurs de leurs paramètres.



Intégrales de surfaces

6. Soient a, b, c trois réels strictement positifs. En s'inspirant des coordonnées sphériques, paramétrer l'ellipsoïde E d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Calculer le flux à travers E du champ de vecteurs $w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. En déduire le volume de E .

7. Soit a un réel. On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par

$$w_a(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a le champ de vecteurs w_a dérive-t-il d'un potentiel ? Montrer que pour tout a , la circulation de w_a le long de toute courbe fermée contenue dans un plan horizontal est nulle.

8. Calculer le flux à travers la sphère unité du champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ zx^2 + zy^2 + z^3 \end{pmatrix}.$$

Calculer la divergence de w et l'intégrale de la divergence sur la boule unité. Comparer.

Diagonalisation : calcul des puissances d'une matrice

Méthode.

- Si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$, la diagonaliser, i.e. trouver P telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale, puis effectuer $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Si le polynôme caractéristique de A est de la forme $P_A(x) = (x - \lambda)^n$, appliquer la formule du binôme $A^k = (\lambda I + (A - \lambda I))^k = \lambda^k I + k\lambda^{k-1}(A - \lambda I) + \dots$.

9. Deux fabricants lancent simultanément deux produits concurrents, a et b . Afin de promouvoir ces produits, ils font appel à des sociétés de publicité qui procèdent à des sondages. Chaque mois, on interroge les mêmes individus, qui sont obligés de se déterminer en faveur soit du produit a , soit du produit b . On note p_n (resp. $q_n = 1 - p_n$) la proportion d'individus interrogés le n -ème mois qui se déclarent favorables au produit a (resp. b). On constate qu'un individu favorable à a à un un moment donné garde une fois sur deux le même avis le mois suivant, alors qu'un individu favorable au modèle b garde le même avis sept fois sur dix le mois suivant.

Déterminer le comportement des suites (p_n) et (q_n) lorsque n tend vers l'infini.

10. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.