

Chapitre 1.

Treillis et adjonctions

1.1. Prologue

Ce chapitre débute l'étude de méthodes permettant de rassembler de nombreux objets et raisonnements qui paraissent différents à première vue. Il introduit des outils élémentaires qui sont directement utilisables et préparent également à la théorie des catégories. Pour motiver ces outils, nous allons donner trois démonstrations de l'énoncé suivant.

Proposition 1.1.1

Soit G et G' des groupes. Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Soit $S \subseteq G$ une partie de G . On a

$$f(\langle S \rangle) = \langle f(S) \rangle.$$

Démonstration: On a une description concrète des éléments du sous-groupe engendré par une partie.

$$\langle S \rangle = \left\{ g \in G \mid \exists n, \exists s_1, \dots, s_n \in S, \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, g = \prod_i s_i^{\varepsilon_i} \right\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(\langle S \rangle) &= \{g' \in G' \mid \exists g \in \langle S \rangle, f(g) = g'\} \\ &= \left\{ g' \in G' \mid \exists n, \exists s_1, \dots, s_n \in S, \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, f\left(\prod_i s_i^{\varepsilon_i}\right) = g' \right\} \\ &= \left\{ g' \in G' \mid \exists n, \exists s_1, \dots, s_n \in S, \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, \prod_i f(s_i)^{\varepsilon_i} = g' \right\} \\ &= \left\{ g' \in G' \mid \exists n, \exists s'_1, \dots, s'_n \in f(S), \exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, \prod_i s_i'^{\varepsilon_i} = g' \right\} \\ &= \langle f(S) \rangle. \end{aligned}$$

Où le fait que f est un morphisme de groupes a été utilisé pour passer f à l'intérieur du produit et sous les élévations à la puissance ε_i . □

La démonstration ci-dessus est correcte et apporte de l'information expliquant l'énoncé. On peut s'en inspirer pour démontrer l'énoncé analogue pour les applications linéaires et les sous-espaces vectoriels engendrés par une partie. Il faut simplement remplacer les produits d'éléments de S et de leurs inverses par des combinaisons linéaires d'éléments de S .

Plus généralement on peut espérer s'en inspirer pour toute structure algébrique pour laquelle on dispose d'une description concrète des éléments de la sous-structure engendrée par une partie. Mais ces adaptations ne sont pas aussi automatiques qu'on pourrait l'espérer.

On peut également regretter que cette démonstration ne fasse pas apparaître le fait que le sous-groupe engendré par une partie est le plus petit sous-groupe la contenant. Voici une démonstration qui résout ces deux problèmes.

Démonstration: Vérifions que $f(\langle S \rangle)$ vérifie la propriété qui caractérise $\langle f(S) \rangle$. On note d'abord qu'il s'agit bien d'un sous-groupe contenant $f(S)$. Montrons que c'est le plus petit. Soit H' un sous-groupe de G' . On a

$$\begin{aligned} f(S) \subseteq H' &\Leftrightarrow S \subseteq f^{-1}(H') \\ &\Leftrightarrow \langle S \rangle \subseteq f^{-1}(H') \quad \text{car } f^{-1}(H') \text{ est un sous-groupe de } G \\ &\Leftrightarrow f(\langle S \rangle) \subseteq H'. \end{aligned} \quad \square$$

La démonstration ci-dessus est beaucoup moins spécifique aux groupes que notre première démonstration car elle ne fait pas intervenir la description concrète des éléments du sous-groupe engendré une partie. Par exemple, elle s'adapte directement pour démontrer l'énoncé analogue concernant l'image par une application linéaire du sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Mais nous manquons de mot pour décrire efficacement cette démonstration et donner un énoncé abstrait qui s'applique directement au différents cas.

Pour dégager les notions pertinentes, il est utile de rendre plus explicite les différents ensembles et applications en jeu, on précisant à chaque fois le groupe ambiant. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G et $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G . Le second est bien sûr inclus dans le premier. Pour bien comprendre la situation, il est fructueux de nommer l'inclusion $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{P}(G)$, c'est-à-dire l'application qui envoie tout sous-groupe H sur la partie H . Nommons cette inclusion ι et notons ι' l'inclusion analogue pour G' . De même on notera $\langle \cdot \rangle'$ l'application sous-groupe engendré pour G' . Il est également utile de distinguer l'application d'image directe par f de sa restriction à $\mathcal{S}(G)$ qu'on notera $\mathbf{f}$.

L'énoncé devient alors $\mathbf{f} \circ \langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle' \circ f$. Toutes les applications intervenant dans la démonstration apparaissent sur le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(G) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} & \mathcal{P}(G') \\
\begin{array}{c} \uparrow \iota' \\ \downarrow \iota' \end{array} \langle \cdot \rangle & & \begin{array}{c} \uparrow \iota' \\ \downarrow \iota' \end{array} \langle \cdot \rangle' \\
\mathcal{S}(G) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} & \mathcal{S}(G')
\end{array}$$

On peut réécrire le calcul principal en

$$\begin{aligned}
f(S) \subseteq \iota'(H') &\Leftrightarrow S \subseteq f^{-1}(\iota'(H')) \\
&\Leftrightarrow S \subseteq \iota(f^{-1}(H')) \\
&\Leftrightarrow \langle S \rangle \subseteq f^{-1}(H') \\
&\Leftrightarrow f(\langle S \rangle) \subseteq H'.
\end{aligned}$$

On notera que le fait de nommer ι et ι' et de distinguer les deux côtés horizontaux du diagramme a fait apparaître une ligne supplémentaire correspondant à l'égalité évidente $f^{-1} \circ \iota' = \iota \circ f^{-1}$.

Chaque côté du carré est constitué de deux applications allant en sens opposé. La relation entre ces applications apparaît clairement dans la démonstration. Par exemple, pour le côté du haut, on a utilisé : pour toutes parties $A \subseteq G$ et $A' \subseteq G'$ on a

$$f(A) \subseteq A' \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(A').$$

Chaque côté du carré fait apparaître une paire d'applications liées de cette façon et chaque lien intervient exactement une fois dans le calcul.

On peut donc dire que le carré d'applications liées et la relation $f^{-1} \circ \iota' = \iota \circ f^{-1}$ entraîne l'énoncé voulu $f \circ \langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle' \circ f$. Il ne reste plus qu'à définir le cadre général qui est ainsi apparu naturellement. Le lien entre paire d'applications sera appelé adjonction et nous expliquerons aussi comment construire systématiquement de telles paires.

1.2. Ensembles ordonnés, fonctions croissantes et plongements

Commençons par des rappels de vocabulaire.

Définition 1.2.1

Une relation d'ordre sur un ensemble X est une relation $\leq$ telle que

- $\leq$ est réflexive : $\forall x \in X, x \leq x$
- $\leq$ est transitive : $\forall x, y, z \in X, x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- $\leq$ est anti-symétrique : $\forall x, y \in X, x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

La première relation d'ordre enseignée explicitement est celle sur les nombres (entiers puis rationnels puis réels) Mais il s'agit d'un exemple très trompeur car il vérifie la condition extrêmement forte de totalité : pour tous nombres x et y , on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. Cette condition ne découle pas du tout de la définition de relation d'ordre. Un bien meilleur exemple à garder en tête est celui de $X = \mathcal{P}(A)$ muni de la relation d'inclusion.

On rappelle que, pour toute relation R , l'opposé de R est la relation R' définie par $xR'y$ si yRx . On montre facilement que l'opposé d'une relation d'ordre est aussi une relation d'ordre. Lorsqu'un ensemble X est muni d'une relation d'ordre claire, on écrira X^{op} pour désigner X muni de la relation opposée.

Définition 1.2.2

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre ensembles ordonnés.

- On dit que f est croissante si $\forall (x, x'), x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.
- On dit que f est un plongement (d'ensembles ordonnés) si $\forall (x, x'), x \leq x' \Leftrightarrow f(x) \leq f(x')$.

On notera que les plongements sont des applications croissantes. On montre facilement qu'un plongement est toujours une application injective et induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre la source du plongement et son image.

Remarque 1.2.3 : Dans le cas des ensembles totalement ordonnés (comme par exemple les ensembles de nombres), une application est un plongement si et seulement si elle est strictement croissante : $\forall (x, x'), x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$. On peut écrire la définition d'application strictement croissante dans le cas général mais elle n'a plus aucune bonne propriété. Par exemple, une application strictement croissante n'est pas nécessairement injective (penser au cas où la relation à la source est triviale : tout élément n'est inférieur qu'à lui-même, ce qui fait que toute application ayant cette source est strictement croissante). Pire, une bijection strictement croissante n'est pas nécessairement un plongement (considérer par exemple $X = \{0, 1\}$ muni de la relation triviale, $Y = \{0, 1\}$ muni de la relation usuelle et $f = \text{Id}$). La bonne notion est vraiment celle de plongement.

1.3. Adjonctions

Nous pouvons maintenant écrire la définition centrale de ce chapitre.

Définition 1.3.1

Une adjonction (ou connexion de Galois) entre ensembles ordonnés X et Y est une paire d'applications $(l : X \rightarrow Y, r : Y \rightarrow X)$ telles que

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \quad l(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq r(y).$$

Exemple 1.3.2 : Soit $f : X \rightarrow Y$ un isomorphisme d'ensemble ordonnés, d'inverse f^{-1} . On a $f \dashv f^{-1}$ et $f^{-1} \dashv f$. En un sens, la notion d'adjonction est un affaiblissement de cette relation d'isomorphisme.

Exemple 1.3.3 : Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. L'image directe par f et l'image inverse par f forment une adjonction entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$. On la notera $f_* \dashv f^*$ pour éviter de confondre f et l'image directe par f ou confondre une éventuelle fonction inverse de f et l'image réciproque.

Exemple 1.3.4 : Soit G un groupe. On a une adjonction entre l'ensemble des parties de G et celui de ces sous-groupe formée de l'application qui envoie une partie G sur le sous-groupe qu'elle engendre et de l'inclusion des sous-groupes dans les parties. On verra plus loin comment utiliser la théorie abstraite des treillis complets pour obtenir l'existence et l'unicité du sous-groupe engendré par une partie. Pour l'instant on suppose que cet exemple est fourni par le cours d'algèbre.

Exemple 1.3.5 : On note $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ l'application d'inclusion. On note $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application partie entière (inférieure) et $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application partie entière supérieure. On a $\lceil \cdot \rceil \dashv \iota$ et $\iota \dashv \lfloor \cdot \rfloor$.

Exemple 1.3.6 : Soit X un espace topologique. On note i l'inclusion de l'ensemble des fermés de X dans $\mathcal{P}(X)$ et j celle des ouverts. On note $\bar{\cdot}$ l'opération d'adhérence et $\circ$ l'opération d'intérieur. On a $\bar{\cdot} \dashv i$ et $j \dashv \circ$.

Exercice 1.1 : Dans un espace topologique, en utilisant la définition

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ fermé}}} F,$$

montrer qu'on a bien une adjonction $\bar{\cdot} \dashv i$ où i est l'inclusion des fermés de X dans les parties de X .

À partir des exemples précédents, nous pouvons engendrer de nouveaux exemples à l'aide des deux résultats suivants.

Lemme 1.3.7

Si (l, r) est une adjonction entre X et Y et (l', r') est une adjonction entre Y et Z alors $(l' \circ l, r \circ r')$ est une adjonction entre X et Z .

Démonstration : La vérification est immédiate. □

Remarque 1.3.8 : Soit (l, r) une adjonction entre X et Y . Soit X' et Y' des parties de X et Y respectivement. Si l envoie X' dans Y' et r envoie Y' dans X' alors les restrictions de l et r forment clairement une adjonction entre X' et Y' .

Exemple 1.3.9 : Si f est un morphisme entre deux groupes G et H alors la remarque précédente assure que l'image directe et l'image réciproque par f forment une adjonction entre les sous-groupes de X et les sous-groupes de Y .

Commençons maintenant notre étude des propriétés des adjonctions.

Lemme 1.3.10

Si (l, r) une adjonction entre X et Y alors l et r sont croissantes.

De plus $\text{Id}_X \leq r \circ l$ et $l \circ r \leq \text{Id}_Y$. La première relation est appelée l'unité de l'adjonction tandis que la seconde est appelée co-unité.

Réciproquement, si deux applications $l : X \rightarrow Y$ et $r : Y \rightarrow X$ soit croissantes et vérifient $\text{Id}_X \leq r \circ l$ et $l \circ r \leq \text{Id}_Y$ alors $l \dashv r$.

Démonstration : Soit $x \in X$. Comme $l(x) \leq l(x)$, on a $x \leq r(l(x))$. On montre de même que $l \circ r \leq \text{Id}$. Montrons maintenant la croissance de l . Soit x et x' dans X tels que $x \leq x'$. Comme $x' \leq r(l(x'))$, on obtient par transitivité $x \leq r(l(x'))$ et donc $l(x) \leq l(x')$. La croissance de r découle de ce résultat pour (r, l) vu comme adjonction entre $(X, \geq)$ et $(Y, \geq)$ (on peut aussi donner une démonstration directe tout à fait analogue).

Montrons maintenant la réciproque. On suppose l et r croissante, $\text{Id}_X \leq r \circ l$ et $l \circ r \leq \text{Id}_Y$. Soit $x \in X$ et $y \in Y$. Supposons $l(x) \leq y$. Comme r est croissante, on en déduit $r(l(x)) \leq r(y)$ puis, comme $\text{Id}_X \leq r \circ l$, $x \leq r(y)$. Réciproquement, supposons $x \leq r(y)$. Comme l est croissante, on en déduit $l(x) \leq l(r(y))$ puis, comme $l \circ r \leq \text{Id}_Y$, $l(x) \leq y$. $\square$

Exercice 1.2 : Montrer directement que tout adjoint à droite est croissant, sans se ramener au cas des adjoints à gauche.

On notera que les inégalités d'unité et de co-unité précisent l'idée selon laquelle une adjonction est une version affaiblie d'un isomorphisme d'ensembles ordonnés (cf. exemple 1.3.2). Parfois, comme dans les deux exemples ci-dessous, exactement une des deux inégalités est une égalité.

Il faut parfois plisser un peu les yeux pour reconnaître ces deux inégalités, particulièrement lorsque qu'une des deux moitiés de l'adjonction est notée par un symbole invisible, par exemple parce qu'il s'agit d'une inclusion.

Exemple 1.3.11 : Soit S une partie d'un groupe G . On a $S \subseteq \langle S \rangle$, c'est l'unité de l'adjonction entre $\langle \cdot \rangle$ et l'inclusion des sous-groupes de G dans les parties de G .

Exemple 1.3.12 : Soit A une partie d'un espace topologique. On a $A \subseteq \overline{A}$ (unité de l'adjonction adhérence/inclusion) et $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ (co-unité de l'adjonction inclusion/intérieur).

Lemme 1.3.13

Une application entre ensembles ordonnés admet au plus un adjoint à gauche, et au plus un adjoint à droite.

Démonstration: Supposons que r et r' sont adjoints à droite d'une application l entre deux ensembles ordonnés X et Y . Soit y dans Y . Comme (l, r) est une adjonction, le lemme précédent assure que $l(r(y)) \leq y$. Comme (l, r') est une adjonction, on en déduit $r(y) \leq r'(y)$. En échangeant les rôles de r et r' on montre de même que $r'(y) \leq r(y)$ et donc $r(y) = r'(y)$.

L'unicité de l'adjoint à gauche en découle en passant aux relations opposées. $\square$

Exercice 1.3 : Montrer directement qu'une application entre ensembles ordonnés admet au plus un adjoint à gauche, sans se ramener au cas des adjoints à droite.

Nous pouvons maintenant donner l'énoncé qui permet de démontrer le résultat du prologue.

Corollaire 1.3.14

Soit X, Y, Z et W des ensembles ordonnés. On suppose qu'on a le diagramme suivant où toutes les paires de flèches opposées sont des adjonctions (avec l à gauche et r à droite).

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \xleftarrow{l_{YX}} \\ \perp \\ \xrightarrow{r_{XY}} \end{array} & Y \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} l_{ZX} \\ \vdots \\ l_{WZ} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} \\
 r_{XZ} & & r_{YW} \\
 Z & \begin{array}{c} \xleftarrow{l_{WZ}} \\ \perp \\ \xrightarrow{r_{ZW}} \end{array} & W
 \end{array}$$

Les adjoints à droite commutent si et seulement si les adjoints à gauche commutent :

$$r_{XY} \circ r_{YW} = r_{XZ} \circ r_{ZW} \Leftrightarrow l_{WZ} \circ l_{ZX} = l_{WY} \circ l_{YX}.$$

Démonstration: Le lemme 1.3.7 assure qu'on a les adjonctions $(l_{WZ} \circ l_{ZX}, r_{XZ} \circ r_{ZW})$ et $(l_{WY} \circ l_{YX}, r_{XY} \circ r_{YW})$. On conclut par l'unicité du lemme 1.3.13. $\square$

Exemple 1.3.15 : Soit f un morphisme entre des groupes G et G' . On a vu dans l'exemple 1.3.4 et la remarque 1.3.8 que les images directe et réciproque par f forment des adjonctions entre les parties de G et G' et entre les sous-groupes de G et G' . Par ailleurs la construction de sous-groupe engendré et l'inclusion des parties forment des adjonctions entre les parties et les sous-groupes, à la fois dans G et dans G' .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(G) & \begin{array}{c} \xleftarrow{f_*} \\ \perp \\ \xrightarrow{f^*} \end{array} & \mathcal{P}(G') \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \langle \cdot \rangle \\ \vdots \\ \langle \cdot \rangle \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} \\
 \iota & & \iota \\
 \mathcal{S}(G) & \begin{array}{c} \xleftarrow{f_*} \\ \perp \\ \xrightarrow{f^*} \end{array} & \mathcal{S}(G')
 \end{array}$$

De plus on sait que, pour tout sous-groupe H dans G' , $\iota(f^*H) = f^*(\iota H)$. Le corollaire précédent donne donc, pour toute partie S de G , le sous-groupe engendré par la partie f_*S est le sous-groupe $f_*\langle S \rangle$.

La même démonstration montre que le sous-espace vectoriel engendré par l'image d'une partie par une application linéaire est l'image du sous-espace engendré par cette partie. Cela fonctionne avec les sous-anneaux, les sous-algèbres etc... Il faut bien sûr se méfier des cas où l'opération d'image directe pose problème. Par exemple, l'image d'un sous-groupe distingué par un morphisme de groupes n'est pas distingué en général.

Exercice 1.4 :

1. On note $\iota : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ l'inclusion. Montrer que l'application partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$ est, par définition, adjointe à droite de ι .
2. Dans toute la suite de cet exercice, on fixe un entier $n > 0$. Montrer que $\cdot \times n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la multiplication par n , est adjointe à gauche de $\cdot // n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, le quotient dans la division euclidienne par n . Quel est l'énoncé analogue pour $\cdot \times n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$?
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lfloor x/n \rfloor = \lfloor x \rfloor // n$.

Exercice 1.5 : Soit X, Y, Z et W des ensembles ordonnés. On suppose qu'on a des applications

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \iota' \uparrow & & \downarrow \iota \\ & \psi & \\ Z & \xleftarrow{\quad} & W \end{array}$$

où ι et ι' sont des plongements d'ensembles ordonnés (on ne suppose pas le diagramme commutatif).

1. Montrer que si $\iota' \circ \psi \dashv \iota \circ \varphi$ alors $\psi \circ \iota \dashv \varphi \circ \iota'$.
2. Soit X et Y des espaces topologiques. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue. On note $F(X)$ et $F(Y)$ les ensembles des fermés de X et Y respectivement. On note ι_X et ι_Y les inclusions de $F(X)$ et $F(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{P}(Y)$ respectivement. On note f^F la restriction de f^* à $F(Y)$. La continuité de f assure que f^F va de $F(Y)$ dans $F(X)$. Montrer que f^F est adjoint à droite de $\tau \circ f_* \circ \iota_X$. En déduire que, pour toute partie A de X , $\overline{f_*A} = \overline{f_*A}$ puis que $\overline{f_*A} \subseteq \overline{f_*A}$ (ici les inclusions sont omises). Cette question est plus difficile que les exercices précédents.

1.4. Treillis complets et théorème de l'application adjointe

Définition 1.4.1

Un treillis complet est un ensemble ordonné X pour lequel il existe des fonctions

$$\inf : \mathcal{P}(X) \rightarrow X \quad \text{et} \quad \sup : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$$

ayant les propriétés universelles suivantes : pour toute partie S de X et tout y dans X ,

$$y \text{ est un minorant de } S \Leftrightarrow y \leq \inf S,$$

et

$$y \text{ est un majorant de } S \Leftrightarrow \sup S \leq y.$$

En particulier $\inf S$ est un minorant de S et $\sup S$ en est un majorant.

Remarque 1.4.2 : Les définitions ci-dessus sont très symétriques et se généraliseront bien en théorie des catégories. Mais en pratique il est souvent commode d'observer qu'un élément x est une borne inférieure d'une partie S si x est un minorant de S et si tout autre minorant est inférieure à x . Autrement dit x est borne inférieure de S s'il est un élément maximum de l'ensemble des minorants de S . De même un élément x est une borne supérieure d'une partie S si x est un majorant de S et si tout autre majorant est supérieure à x .

Exercice 1.6 : Montrer que si la relation d'ordre sur un treillis complet X est *totale* alors, pour toute partie S , $\inf S$ est caractérisé par le fait qu'il minore S et que, $\forall x > \inf S, \exists s \in S, s < x$.

Lemme 1.4.3

Dans un treillis complet, les fonctions $\inf$ et $\sup$ sont uniques. De plus la fonction $\inf$ est décroissante et la fonction $\sup$ est croissante, étant entendu qu'on muni $\mathcal{P}(X)$ de la relation d'inclusion.

Démonstration : Soit S une partie d'un ensemble ordonné X . Supposons que x et x' sont des inf de S et montrons que $x = x'$. Vu que x et x' jouent des rôles symétriques et que le relation d'ordre est antisymétrique, il suffit de montrer que $x \leq x'$.

Comme x' est un inf de S , il suffit de montrer que x est un minorant de S . Or on a supposé que x est un inf de S donc c'est en particulier un minorant.

La démonstration de l'unicité du $\sup$ est complètement analogue (on peut aussi appliquer le résultat sur l'inf à la relation d'ordre opposée).

Montrons maintenant que la fonction $\inf$ est décroissante. Soit S et T des parties de X telles que S est incluse dans T . Montrons que $\inf T \leq \inf S$. Par définition de $\inf$, il suffit de montrer

que $\inf T$ est un minorant de S . Or on sait que c'est un minorant de T et S est incluse dans T .

Là encore un raisonnement tout à fait analogue montre que $\sup$ est croissante. Notons qu'on peut déduire cela du résultat du paragraphe précédant appliqué à l'ordre opposé. Comme la relation d'ordre sur les parties ne change pas, la conclusion devient la croissance et non la décroissance. $\square$

La notion de treillis complet est en fait un renforcement de la notion de treillis qui ne demande l'existence d'inf et sup que pour les parties à deux éléments. Nous n'auront pas besoin de cette notion plus faible mais nous utiliserons une notation qui provient de ce contexte.

Notation 1.4.4

Pour x et y dans un treillis complet (ou plus généralement un treillis), on note

$$x \wedge y := \inf\{x, y\} \quad \text{et} \quad x \vee y := \sup\{x, y\}.$$

Pour toute fonction $f : A \rightarrow X$ à valeurs dans un treillis complet et toute partie $S \subseteq A$, on notera

$$\inf_{a \in S} f(a) := \inf(f_* S) \quad \text{et} \quad \sup_{a \in S} f(a) := \sup(f_* S).$$

Les notations ci-dessus sont parfois utilisées en arithmétique dans le cas $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ muni de la relation de divisibilité. On a alors $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$ et $x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$.

Exercice 1.7 : Soit X un treillis complet (ou plus généralement un treillis). Montrer que, pour tous x, y et z ,

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z).$$

Lorsque il y a toujours égalité, on dit que le treillis est *distributif*.

Nous avons vu que les notions de $\sup$ et d'inf sont déjà intéressantes pour des parties à deux éléments. En fait même le cas de la partie vide est intéressante.

Remarque 1.4.5 : Dans un ensemble ordonné, un élément x_0 est inf de la partie vide si et seulement si il est maximum: $\forall x, x \leq x_0$. En effet tout élément minore la partie vide: $\forall x, \forall x' \in \emptyset, x \leq x'$. De façon analogue, un élément x_1 est sup de la partie vide si et seulement si il est minimum: $\forall x, x_1 \leq x$. En effet tout élément majore la partie vide. Ainsi dans un treillis complet il existe exactement un minimum noté $\perp$ et un maximum noté $\top$.

L'énoncé suivant est très important car dans de nombreux exemples d'ensembles ordonnés, les bornes inférieures sont bien plus faciles à construire que les bornes supérieures ou le contraire.

Théorème 1.4.6

Pour vérifier qu'un ensemble ordonné X est un treillis complet, il suffit de montrer qu'il admet une des deux fonctions inf ou sup. De plus on a, pour toute partie S de X ,

$$\sup(S) = \inf\{\text{majorants de } S\} \quad \text{et} \quad \inf(S) = \sup\{\text{minorants de } S\}$$

Démonstration: Supposons que X admet une fonction inf. Pour toute partie S de X , on pose $s(S) = \inf\{\text{majorants de } S\}$. Vérifions pour s la propriété universelle requise d'une fonction sup. Soit y un élément de X . Supposons que y est un majorant de S . Alors $s(S) \leq y$ car l'inf d'un ensemble en est un minorant. Réciproquement si $s(S) \leq y$. Montrons que y est un majorant de S . Soit x dans S . Par définition, tous les majorants de S sont supérieurs à x donc x est un minorant de l'ensemble des majorants de S . On en déduit $x \leq \inf\{\text{majorants de } S\} = s(S)$ puis $x \leq y$ par transitivité.

De plus le lemme 1.4.3 assure l'unicité du sup donc ce lien entre sup et inf est toujours valable.

En passant aux relations d'ordres opposées on en déduit que l'existence de sup garantie celle de inf. $\square$

Exemple 1.4.7 : L'ensemble des sous-groupes d'un groupe fixé est un treillis complet pour l'inclusion. En effet l'intersection d'un ensemble de sous-groupes est un sous-groupe qui est clairement borne inférieure de cet ensemble. L'existence de bornes supérieures est offerte par la proposition.

Exercice 1.8 : Expliciter les bornes supérieures fournies par le théorème 1.4.6 dans l'exemple des sous-groupes d'un groupe fixé.

La situation de cet exemple est très courante et il est utile d'en extraire un corollaire du théorème.

Corollaire 1.4.8

Soit X un treillis complet et X' une partie de X . On munit X' de la relation d'ordre induite. On suppose que, pour tout $S \subseteq X'$, $\inf(S) \in X'$ (où l'inf est pris dans X). Alors $\inf(S)$ est également borne inférieure de S dans X' et X' est un treillis complet. Ainsi l'inclusion ι de X' dans X commute aux infs: $\forall S \subseteq X', \inf(\iota_(S)) = \iota(\inf(S))$. Mais en général elle ne commute pas aux sups.*

L'énoncé analogue dans le cas où pour tout $S \subseteq X'$, $\sup(S) \in X'$ est vrai aussi.

Exercice 1.9 : Expliciter les sups dans le treillis des fermés d'un espace topologique et les infs dans celui des ouverts:

Le thème de la commutation aux infs et aux sups sera le thème majeur de toute la fin de cette section. Voyons d'abord ce qui est vrai pour toute fonction croissante.

Lemme 1.4.9

Soit X et Y des treillis complets et S une partie de X . Pour toute fonction croissante f de X dans Y , on a $f(\inf S) \leq \inf f_(S)$ et $f(\sup S) \geq \sup f_*(S)$.*

Démonstration: Il suffit de montrer la première inégalité, l'autre s'en déduisant par passage aux relations opposées. Vu la propriété universelle de $\inf f_*(S)$, il suffit de montrer que

$f(\inf S)$ est un minorant de $f_*(S)$. Soit s dans S . On a $\inf S \leq s$ et par croissance de f on en déduit $f(\inf S) \leq f(s)$. $\square$

Exercice 1.10 : Soit X et Y des treillis complets, S une partie de X et $f : X \rightarrow Y$ une fonction croissante. Montrer directement, sans se ramener au cas de l'inf, que $f(\sup S) \geq \sup f_*(S)$.

Nous arrivons au deuxième énoncé central de cette section qui caractérise les applications ayant des adjoints. Cette caractérisation est utile dans les deux directions, pour obtenir des propriétés des adjoints et pour les construire.

Théorème 1.4.10

Une application l entre des treillis complets X et Y admet un adjoint à droite si et seulement si elle « commute aux sup », c'est à dire $\forall S \in \mathcal{P}(X), l(\sup S) = \sup l_(S)$. Cet adjoint est alors $y \mapsto \sup\{x \mid l(x) \leq y\}$.*

De même, une application r entre treillis complets Y et X admet un adjoint à gauche si et seulement si elle « commute aux inf », c'est à dire $\forall S \in \mathcal{P}(Y), r(\inf S) = \inf r(S)$. Cet adjoint est alors $x \mapsto \inf\{y \mid x \leq r(y)\}$.

Démonstration : Il suffit de montrer la première partie puisque la seconde s'en déduit en passant aux relations d'ordre opposées. Supposons d'abord que l admet un adjoint à droite r . Soit S une partie de X . Montrons que $l(\sup S)$ vérifie la propriété universelle qui caractérise $\sup f_*(S)$. Soit y dans Y . On calcule en utilisant la propriété d'adjonction dans la troisième et la cinquième équivalence et la propriété de $\sup(S)$ dans la quatrième :

$$\begin{aligned} y \text{ majorant de } l_*(S) &\Leftrightarrow \forall z \in l_*(S), z \leq y \\ &\Leftrightarrow \forall x \in S, l(x) \leq y \\ &\Leftrightarrow \forall x \in S, x \leq r(y) \\ &\Leftrightarrow \sup(S) \leq r(y) \\ &\Leftrightarrow l(\sup(S)) \leq y \end{aligned}$$

Réciproquement supposons que l vérifie cette propriété. On commence par remarquer que l est croissante. En effet, supposons que x et x' dans X vérifient $x \leq x'$. On a $x' = \sup\{x, x'\}$ donc $l(x') = \sup\{l(x), l(x')\}$ et donc $l(x) \leq l(x')$.

Soit $r : Y \rightarrow X$ qui envoie y sur $\sup\{x \mid l(x) \leq y\}$. Montrons que (l, r) est une adjonction. Soit $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Supposons d'abord que $l(x_0) \leq y_0$. On a alors $x_0 \in \{x \mid l(x) \leq y_0\}$ donc $x_0 \leq \sup\{x \mid l(x) \leq y_0\} = r(y_0)$. Réciproquement supposons $x_0 \leq r(y_0)$. Comme l est croissante, on obtient $l(x_0) \leq l(\sup\{x \mid l(x) \leq y_0\})$. Vu l'hypothèse sur l on en déduit que $l(x_0) \leq \sup l_*(\{x \mid l(x) \leq y_0\})$. Or y_0 majore $l_*(\{x \mid l(x) \leq y_0\})$ donc $\sup\{y \mid y \leq y_0\} \leq y_0$ et on conclut par transitivité. $\square$

Exemple 1.4.11 : Soit f une application entre deux ensembles A et B . L'application d'image réciproque $f^* : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ commute aux intersections donc elle admet un adjoint à gauche : f_* . Bien sûr on connaît déjà cet adjoint à gauche, c'est l'application d'image directe

par f (rappelons que l'adjoint à gauche est unique d'après le lemme 1.3.13). On en déduit que l'image directe commute aux réunions.

Comme l'image directe f_* ne commute pas aux intersections (penser à une application constante et à $S = \{\{a\}, \{b\}\}$ pour $a \neq b$ par exemple), elle n'a pas d'adjoint à droite.

Par contre f^* commute également aux réunions donc elle admet également un adjoint à droite. Cet adjoint à droite est nettement moins courant que l'image directe et n'a pas de nom universellement utilisé. On le notera $f_!$.

Exercice 1.11 : Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Calculer $f_! : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ de deux façons différentes : en utilisant la formule fournie par le théorème 1.4.10 pour l'adjoint ou en utilisant l'involution de passage au complémentaire qui commute aux images réciproques et renverse les inclusions.

Comme corollaire du théorème 1.4.10, on retrouve une version du corollaire 1.4.8 :

Corollaire 1.4.12

Soit $\iota : X \hookrightarrow X'$ un plongement d'ensembles ordonnés (par exemple une inclusion). On suppose que X' est un treillis complet et que, pour chaque $S \subseteq X$, il existe $x \in X$ tel que $\inf \iota_ S = \iota x$. Alors X est un treillis complet, ι commute aux inf et admet un adjoint à gauche $l : x' \mapsto \inf\{x \mid x' \leq \iota x\}$.*

De même si, pour chaque $S \subseteq X$, il existe $x \in X$ tel que $\sup \iota_ S = \iota x$. Alors X est un treillis complet, ι commute aux sup et admet un adjoint à droite $r : x' \mapsto \sup\{x \mid \iota x \leq x'\}$.*

Le corollaire précédent montre l'existence du sous-groupe engendré par une partie d'un groupe et tous les autres exemples algébriques analogues.

On peut ensuite appliquer à ces exemples les propriétés générales des adjoints. Par exemple, les adjoints à gauche commutent aux sups donc le sous-espace vectoriel engendré par une réunion de parties est la somme des sous-espaces engendré par ces parties. En effet la somme de sous-espaces est l'opération de sup dans le treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel.

Le corollaire montre également l'existence des opération d'adhérence et d'intérieur en topologie.

On termine ce chapitre par quelques exercices supplémentaires qui seront utilisés dans la suite.

Exercice 1.12 : Soit A et B des ensembles. Soit X un treillis complet. Soit $\varphi : B \rightarrow X$ et $\psi : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ des fonctions. Montrer que

$$\inf_{U \in \bigcup_{a \in A} \psi(a)} \varphi(U) = \inf_{a \in A} \left(\inf_{U \in \psi(a)} \varphi(U) \right).$$

Exercice 1.13 : Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction croissante d'un ensemble ordonné dans un treillis complet. Montrer que, pour tout $x \in X$, $\inf \varphi_* \{x' \mid x \leq x'\} = \varphi(x)$.

Exercice 1.14 : Soit X un ensemble ordonné et $y, z : I \rightarrow X$ des fonctions. Montrer que $(\inf_i y_i) \wedge (\inf_i z_i) = \inf_i (y_i \wedge z_i)$. En particulier si y est une fonction constante de valeur x on obtient $x \wedge \inf_i y_i = \inf_i (x \wedge y_i)$.

Chapitre 2.

Filtres

2.1. Prologue

Dans la suite il sera commode d'emprunter un peu de vocabulaire aux logiciens. Un prédicat p sur un ensemble X est « une fonction de X dans les énoncés ». À chaque élément x de X , on associe un énoncé $p(x)$ qui peut être vrai ou faux. Ces gadgets logiques apparaissent par exemple lorsqu'on discute le principe de récurrence sur les entiers : pour tout prédicat p sur $\mathbb{N}$, si $p(0)$ et $\forall n, p(n) \Rightarrow p(n+1)$ alors $\forall n, p(n)$.

Il est courant de dire ou d'écrire « Pour tout entier n assez grand, $p(n)$ », ou « Pour tout x assez proche de x_0 , $p(x)$ » ou « Pour presque tout x , $p(x)$ » pour des prédicat p sur respectivement les entiers, les points d'un espace topologique ou les points d'un espace mesuré. Ces phrases peuvent sembler manquer de rigueur, mais il est facile de préciser ce qu'elles signifient. La première signifie qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $p(n)$. La seconde signifie qu'il existe un ouvert U contenant x_0 tel que, pour tout x dans U , $p(x)$. La seconde signifie qu'il existe un ensemble N mesurable de mesure nulle tel que, pour tout x qui n'est pas dans N , $p(x)$.

Une question naturelle est de se demander quelles sont les propriétés communes à ces trois exemples qui font que cette façon de parler est pertinente. Afin de préciser ce que « pertinente » signifie, on peut se demander quelles sont les règles de manipulation de tels énoncés. Par exemple, on peut facilement montrer que, étant données deux prédicats p et q sur les entiers, si pour tout n assez grand $p(n)$ et pour tout n assez grand $q(n)$ alors, pour tout n assez grand $p(n)$ et $q(n)$. Mais cela ne fonctionnerait pas avec une famille infinie de propriétés. Par exemple, chacune des propriétés $p_k : n \geq k$ est vraie pour n assez grand, mais leur conjonction n'est vraie pour aucun entier. Des observations analogues peuvent être faites dans les exemples topologiques et mesurés.

Dans cette discussion, on voit que l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties d'un ensemble X n'est pas suffisamment grand. Il manque des parties ou ensembles en un sens généralisé. Il manque dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble généralisé $\mathcal{N}_{+\infty}$ des très grands entiers qui permet d'écrire $\forall n \in \mathcal{N}_{+\infty}, p(n)$. Pour tout espace topologique X et $x_0 \in X$, il manque dans $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble généralisé $\mathcal{N}_{x_0}$ des points très proches de x_0 . Pour tout espace mesuré (X, μ) , il manque dans $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble généralisé $\mu - pp$ de presque tous les points de X .

On veut ces ensembles pour pouvoir quantifier des énoncés mais aussi considérer des images directes (et réciproques). Par exemple, si u est une suite de point d'un espace topologique X

et x_0 est un point de X , on veut dire que la suite u tend vers x_0 si $u_*\mathcal{N}_{+\infty}$, l'image directe par u de l'ensemble des très grands entiers, est contenue dans l'ensemble $\mathcal{N}_{x_0}$ des points très proches de x_0 . Cela s'écrit $u_*\mathcal{N}_{+\infty} \leq \mathcal{N}_{x_0}$.

Cette notion d'image directe doit bien sûr interagir harmonieusement avec les quantificateurs. Par exemple, on veut avoir que si v est une autre suite telle que $\forall n \in \mathcal{N}_{+\infty}, v_n = u_n$ alors $u_*\mathcal{N}_{+\infty} = v_*\mathcal{N}_{+\infty}$.

On verra dès le début de ce chapitre comment mettre tout cela en place avec seulement deux définitions et une notation.

La suite du chapitre utilisera intensivement la théorie du chapitre précédent. Par exemple, on veut pouvoir intersecter des parties généralisées et démontrer l'unicité des limites de suites (disons dans $\mathbb{R}$) par la discussion suivante. Soit u une suite qui tend vers x et y . Comme $\mathcal{N}_{+\infty}$ n'est pas l'ensemble vide, son image directe $u_*\mathcal{N}_{+\infty}$ n'est pas l'ensemble vide. Or on a supposé $u_*\mathcal{N}_{+\infty} \leq \mathcal{N}_x$ et $u_*\mathcal{N}_{+\infty} \leq \mathcal{N}_y$ donc $\mathcal{N}_x \cap \mathcal{N}_y$ n'est pas vide, ce qui implique $x = y$.

Cette opération d'intersection sera également utile pour unifier les très nombreuses variantes de la définition de limite. Même en se limitant en fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut écrire $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = ?$ où chacun des points d'interrogation peut être par exemple $x_0, x_0^\pm, \pm\infty$ où des variantes où $x \neq x_0$ ou bien x est dans un ensemble dense. En combinant des possibilités on obtient 16 possibilités, ce qui donne 256 définitions de limite. Garder l'information fine sur le second point d'interrogation permet d'énoncer des lemmes de composition. Par exemple, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) = -\infty$. On parle ici de $16^3 = 4096$ lemmes. La méthode consistant à en énoncer trois, en démontrer deux et laisser le reste en exercice a fait ses preuves et restera irremplaçable en L1. Mais dans ce chapitre nous développerons une méthode alternative.

On voudra également pouvoir définir des intersections de familles infinies de sorte que $\mathcal{N}_{x_0}$ soit l'intersection, au sens des parties généralisées, de tous les voisinages de x_0 . Enfin nous finirons par une discussion des singletons généralisés qui seront particulièrement utile pour l'étude de la compacité dans un chapitre suivant.

2.2. Définition, quantificateurs généralisés et limites

Soit X un ensemble. Les exemples du prologue montrent clairement que les parties généralisées de X qui manquent dans $\mathcal{P}(X)$ correspondent à des ensembles de parties (ordinaires) de X . Par exemple, la partie généralisée des points très proches d'un point x_0 correspond à l'ensemble des voisinages de x_0 .

Pour bien comprendre la discussion qui va suivre, il est essentiel de réaliser que les parties d'un ensemble X et les prédicats sur X sont deux points de vue sur le même objet mathématique. On a la correspondance bijective :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X) &\leftrightarrow \{\text{prédicats sur } X\} \\ U &\mapsto (x \mapsto x \in U) \\ \{x \mid p(x)\} &\leftarrow p\end{aligned}$$

Définition 2.2.1

Soit X un ensemble, p un prédicat sur X et F une famille de parties de X . On définit les énoncés

$$\forall^f x \in F, p(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x \mid p(x)\} \in F$$

et

$$\exists^f x \in F, p(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x \mid \text{non } p(x)\} \notin F.$$

On notera qu'on a $(\exists^f x \in F, p(x)) \Leftrightarrow \text{non } (\forall^f x \in F, \text{non } p(x))$.

Ces notations sont vraiment en un bloc, le $x \in F$ ne signifie rien par lui-même puisque x est un point de X et pas une partie de X . C'est pour cela qu'on utilise $\forall^f$ plutôt que $\forall$ pour ne pas confondre.

On notera que, via la correspondance entre prédicats et parties, la donnée d'un ensemble F de parties de X est complètement équivalente à la donnée de l'ensemble des prédicats p sur X tels que $\forall^f x \in F, p(x)$. De même le quantificateur existentiel généralisé caractérise F mais il jouera un rôle beaucoup moins important pour nous.

Pour montrer qu'on a bien généralisé les quantificateurs ordinaires, on a besoin de la définition suivante (où pour l'instant « filtre principal » se lit comme un seul mot).

Définition 2.2.2

Le filtre principal associé à une partie A de X est l'ensemble $P(A)$ des parties contenant A .

Cette définition assure que, pour toute partie A de X et tout prédicat p sur X ,

$$(\forall^f x \in P(A), p(x)) \Leftrightarrow \{x \mid p(x)\} \in P(A) \Leftrightarrow A \subseteq \{x \mid p(x)\} \Leftrightarrow \forall x \in A, p(x)$$

donc le quantificateur généralisé $\forall^f$ généralise bien $\forall$. De même on a :

$$\begin{aligned}(\exists^f x \in P(A), p(x)) &\Leftrightarrow \{x \mid \text{non } p(x)\} \notin P(A) \Leftrightarrow A \not\subseteq \{x \mid \text{non } p(x)\} \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A, \text{non } p(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A, p(x)\end{aligned}$$

Voyons maintenant quelles conditions nous allons imposer aux familles de parties pour que les notations ci-dessus aient de bonnes propriétés.

Définition 2.2.3

Un filtre F sur un ensemble X est un ensemble de parties de X tel que

1. $X \in F$

2. $\forall U, V, \quad U \in F \text{ et } U \subseteq V \Rightarrow V \in F$
3. $\forall U, V, \quad U \in F \text{ et } V \in F \Rightarrow U \cap V \in F$

On note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des filtres sur X . On le munit de la relation d'ordre induite par $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ (il s'agit donc de la relation opposée à la relation d'inclusion des ensembles de parties).

Remarque 2.2.4 : Dans la définition précédente, on peut remplacer la condition $X \in F$ par la condition en apparence plus faible $F \neq \emptyset$. En effet on a d'une part clairement $X \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$ et d'autre part l'existence d'un élément de F et la seconde condition entraînent $X \in F$.

Les trois conditions de la définition de filtre sont immédiates à vérifier pour les filtres principaux. De même on vérifie immédiatement que l'ensemble des voisinages d'un point x dans un espace topologique X est un filtre sur X , qui fournit notre premier exemple de filtre qui n'est pas principal (et qui est donc une partie généralisée de X au sens strict). Enfin l'ensemble $\mathcal{N}_\infty$ des parties de $\mathbb{N}$ qui contient un rayon $[a, +\infty[$ est également un filtre (c'est lui « l'ensemble généralisé des très grands entiers »).

Exercice 2.1 :

1. Montrer que $\mathcal{N}_\infty$ est bien un filtre sur $\mathbb{N}$.
2. Dans un espace topologique, montrer que l'ensemble $\mathcal{N}_x$ des voisinages d'un point x forme un filtre.

Lemme 2.2.5

En termes de quantificateurs généralisés, les conditions définissant les filtres F sur un ensemble X signifient :

1. Si p est le prédicat toujours vrai sur X alors $\forall^f x \in F, p(x)$.
2. Si p et q sont deux prédicats sur X alors

$$[(\forall^f x \in F, p(x)) \text{ et } (\forall^f x, p(x) \Rightarrow q(x))] \Rightarrow \forall^f x \in F, q(x).$$

3. Si p et q sont deux prédicats sur X alors

$$[(\forall^f x \in F, p(x)) \text{ et } (\forall^f x \in F, q(x))] \Rightarrow \forall^f x \in F, (p(x) \text{ et } q(x)).$$

Démonstration : Cela découle directement du dictionnaire entre parties de X et prédicats. Le prédicat toujours vrai correspond à la partie X . L'implication entre prédicat correspond à l'inclusion et la conjonction correspond à l'intersection. $\square$

Remarque 2.2.6 : La relation d'ordre sur $\mathcal{F}(X)$ assure que $A \leq B$ si et seulement si, pour tout prédicat p sur X , $[\forall^f x \in B, p(x)] \Rightarrow [\forall^f x \in A, p(x)]$. On a bien une généralisation de la caractérisation en terme de quantificateur universel de la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$.

Concernant la relation d'ordre, nous utiliserons également très souvent la remarque suivante.

Remarque 2.2.7 : Pour tout filtre F sur X et tout $U \subseteq X$,

$$U \in F \Leftrightarrow F \leq P(U).$$

Remarque 2.2.8 : Il faut prendre garde au fait que, malgré le lemme précédent, la définition de filtre n'assure pas que les quantificateurs généralisés ont *toutes* les propriétés des quantificateurs ordinaires. Sinon on pourrait facilement montrer qu'il n'y a pas de généralisation et qu'on a rien gagné. En particulier les quantificateurs universels généralisés ne commutent pas : pour des filtres F_1 et F_2 sur un ensemble X et un prédicat p sur X , en général $\forall^f x \in F_1, \forall^f x \in F_2, p(x)$ n'est pas équivalent à $\forall^f x \in F_2, \forall^f x \in F_1, p(x)$, même si l'un des deux filtres est principal. Par exemple, si u est une suite de réels et l un réel, l'énoncé $\forall^f \varepsilon \in P(\mathbb{R}_+^*), \forall^f n \in \mathcal{N}_\infty, |u_n - l| < \varepsilon$ signifie que u tend vers l tandis que $\forall^f n \in \mathcal{N}_\infty, \forall^f \varepsilon \in P(\mathbb{R}_+^*), |u_n - l| < \varepsilon$ signifie que u vaut exactement l à partir d'un certain rang.

Exercice 2.2 : Démontrer soigneusement qu'une somme de deux suites convergentes dans $\mathbb{R}$ est convergente et converge vers la somme des limites, en utilisant la définition élémentaire de convergence des suites. Récrire la démonstration en utilisant comme définition de la convergence de u vers l

$$\forall \varepsilon > 0, \forall^f n \in \mathcal{N}_\infty, |u_n - l| < \varepsilon$$

et les propriétés des quantificateurs généralisés. Où se cachent maintenant les morceaux de démonstration qui ont disparu entre les deux versions ?

L'exercice précédent utilise une définition de limite qui utilise un peu les filtres mais fait toujours apparaître des quantificateurs. Afin de reformuler les notions de limite purement en termes de filtres, nous avons vu dans le prologue qu'il faut également une notion d'image directe d'un filtre par une fonction.

Lemme 2.2.9

Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction et F un filtre sur X . L'ensemble $\varphi_* F := \{V \subseteq Y \mid \varphi^* V \in F\}$ est un filtre sur Y . On l'appelle l'image directe de F par φ .

Démonstration : Les trois vérifications sont immédiates. On a $\varphi^* Y = X$ et $X \in F$ puisque F est un filtre donc $Y \in \varphi_* F$. Soit U et V dans $\varphi_* F$. Par définition, cela signifie que $\varphi^* U \in F$ et $\varphi^* V \in F$. Or F est un filtre donc $\varphi^* U \cap \varphi^* V \in F$, c'est dire $\varphi^*(U \cap V) \in F$ et donc $U \cap V \in \varphi_* F$. Soit $U \in \varphi_* F$ et V contenant U . On a donc $\varphi^* U \in F$ et $\varphi^* U \subseteq \varphi^* V$ car l'image réciproque est croissante. Comme F est un filtre, on en déduit $\varphi^* V \in F$, c'est-à-dire $V \in \varphi_* F$. $\square$

On vérifie sans peine que l'image directe d'un filtre principal $P(A)$ par une fonction φ est le filtre principal $P(\varphi_* A)$. On a donc étendu la notion d'image directe d'une partie.

Vérifions qu'on peut effectivement utiliser cette définition pour parler de limite comme annoncé dans le prologue de ce chapitre.

Lemme 2.2.10

Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ une suite dans un espace topologique X et soit x un point de X . On a

$$u_* \mathcal{N}_\infty \leq \mathcal{N}_x \Leftrightarrow \lim_n u_n = x.$$

Dans le lemme précédent, il est vraiment important de se convaincre que la formulation en terme de filtre est la version intuitive (u envoie les très grands entiers parmi les points très proches de x) et la définition usuelle de limite est la version compliquée.

Démonstration: Il suffit de déplier toutes les définitions: celle de la relation d'ordre sur les filtres, celle l'image directe et celles des filtres en jeux. On a $u_* \mathcal{N}_\infty \leq \mathcal{N}_x$ si et seulement si, pour tout voisinage U de x , u^*U contient un rayon $[N, +\infty[$. Autrement dit, pour tout tel U il existe N tel que $\forall n \in [N, +\infty[, u_n \in U$. $\square$

On verra plus loin que toutes les notions usuelles de limites rentrent dans ce cadre, en variant simplement les filtres en jeu, mais pour cela il nous faudra pour étendre la notion d'intersection de $\mathcal{P}(X)$ à $\mathcal{F}(X)$ dans la section suivante.

Avant cela, notons que la démonstration précédente ne fait intervenir aucune des conditions de la définition de filtre. Comme pour la définition des quantificateurs généralisées, on pourrait définir l'image directe généralisée d'une famille quelconque de parties. Mais les contraintes définissant les filtres garantissent de bonnes propriétés comme nous allons le voir tout de suite.

Exercice 2.3 : Soit F un filtre sur un ensemble X . Montrer que, pour toute fonction constante $\varphi : X \rightarrow Y$ de valeur y_0 , on a $\varphi_* F \leq P(\{y_0\})$, c'est-à-dire que l'image directe de n'importe quel filtre est contenue dans $\{y_0\}$ vu comme filtre. Montrer qu'il y a même égalité dès que F n'est pas $P(\emptyset)$ (on pourra raisonner par contraposition).

L'exercice précédent ne fait intervenir qu'une seule des conditions définissant les filtres. Pour finir ce tour d'horizon des propriétés élémentaires des filtres, vérifions l'énoncé contenu dans le prologue concernant la compatibilité entre la définition du quantificateur universel généralisé et celle de l'image directe. Cette fois les deux autres conditions de filtre vont être nécessaires.

Lemme 2.2.11

Soit φ et ψ des fonctions entre deux ensembles X et Y . Soit F un filtre sur X . Si $\forall^f x \in F, \varphi(x) = \psi(x)$ alors $\varphi_ F = \psi_* F$.*

En particulier si deux suites coïncident sur les grands entiers et que l'une converge vers un point x alors l'autre aussi.

Démonstration: Supposons $\forall^f x \in F, \varphi(x) = \psi(x)$ et montrons que $\varphi_* F = \psi_* F$. Vu la symétrie de la situation, il suffit de montrer que $\varphi_* F \leq \psi_* F$. Soit $V \in \psi_* F$. Montrons que $\varphi^* V \in F$. On a $\psi^* V \in F$. On a également $\{x \mid \varphi(x) = \psi(x)\} \in F$. Or F est un filtre donc $\psi^* V \cap \{x \mid \varphi(x) = \psi(x)\} \in F$. De plus

$$\begin{aligned}
\psi^*V \cap \{x \mid \varphi(x) = \psi(x)\} &= \{x \mid \psi(x) \in V \text{ et } \varphi(x) = \psi(x)\} \\
&= \{x \mid \varphi(x) \in V \text{ et } \varphi(x) = \psi(x)\} \\
&= \varphi^*V \cap \{x \mid \varphi(x) = \psi(x)\} \\
&\subseteq \varphi^*V
\end{aligned}$$

Ainsi φ^*V contient un élément de F donc est dans F puisque F est un filtre. $\square$

Comme annoncé dans le prologue de ce chapitre, la définition de filtre, la définition des quantificateurs généralisés associés et la définition d'image directe d'un filtre par une fonction permettent de manipuler de façon unifiée les énoncés du type « pour tout entier assez grand » et de parler de limite de façon très intuitive. Mais cette théorie élémentaire peut paraître un peu ad-hoc et elle n'est que le tout début de l'histoire. Les sections suivantes vont se reposer sur le chapitre précédent pour bâtir une théorie beaucoup plus vaste et mieux motivée d'un point de vue théorique.

2.3. Structure de treillis complet

Nous avons vu que $P : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ permet de voir toute partie ordinaire comme une partie généralisée, c'est-à-dire un filtre. Voyons maintenant comment aller dans l'autre sens. Au passage nous récupérerons l'injectivité de P (qu'on peut aussi vérifier directement) et de l'aide pour la suite.

Définition 2.3.1

Le noyau d'un filtre F est la partie (pas généralisée) $K(F) := \bigcap_{U \in F} U$.

Lemme 2.3.2

L'application $K : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est adjointe à droite de P . De plus $K \circ P = \text{Id}_{\mathcal{P}(X)}$. En particulier P est injective.

Démonstration: Soit F un filtre sur X et A une partie de X . On a

$$\begin{aligned}
P(A) \leq F &\Leftrightarrow \forall U \in F, U \in P(A) \\
&\Leftrightarrow \forall U \in F, A \subseteq U \\
&\Leftrightarrow A \subseteq \bigcap_{U \in F} U
\end{aligned}$$

De plus $K(P(A)) = \bigcap_{U \in P(A)} U = \bigcap_{U \supseteq A} U = A$. $\square$

Théorème 2.3.3

La relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))^{\text{op}}$ restreinte à $\mathcal{F}(X)$ définit une structure de treillis complet avec les mêmes sup.

L'application $P : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ est un plongement d'ensembles ordonnés qui commute aux infimums des parties finies et à tous les supremums.

En particuliers, pour toutes parties A et B de X ,

$$P(A \cap B) = P(A) \wedge P(B) \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = P(A) \vee P(B).$$

Le minimum $\perp$ de ce treillis complet est $P(\emptyset)$, le filtre de toutes les parties de X et son maximum $\top$ est $P(X)$, le filtre ne contenant que la partie X .

Dans ce théorème, le choix de la relation d'ordre sur $\mathcal{F}(X)$ peut sembler étrange a priori mais il est justifié par le fait qu'il fait de P un plongement d'ensemble ordonnés.

Démonstration: Le corollaire 1.4.8 assure que, pour obtenir la structure de treillis complet, il suffit de montrer que, pour tout $S \subseteq \mathcal{F}(X)$, le sup de S pris dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ est un filtre. Soit $S \subseteq \mathcal{F}(X)$. Le sup de S dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ est l'intersection des éléments de S . Il est immédiat de vérifier qu'il s'agit d'un filtre.

Montrons que P est un plongement d'ensembles ordonnés. Soit A et B des parties de X . On a

$$\begin{aligned} P(A) \leq P(B) &\Leftrightarrow \forall U \subseteq X, U \in P(B) \Rightarrow U \in P(A) \quad \text{par définition de } \leq \\ &\Leftrightarrow \forall U \subseteq X, B \subseteq U \Rightarrow A \subseteq U \quad \text{par définition de } P. \end{aligned}$$

Cette dernière condition est clairement impliquée par $A \subseteq B$. La réciproque est vraie également en spécialisant la condition à $U = B$.

Pour montrer que P commute aux sups, il suffit de noter que le lemme 2.3.2 lui fournit un adjoint à droite et permet donc d'appliquer la théorème 1.4.10. En particulier $P(\perp) = P(\sup \emptyset) = \sup P_* \emptyset = \sup \emptyset = \perp$ donc on obtient bien que le minimum de $\mathcal{F}(X)$ est $P(\perp)$, c'est-à-dire $P(\emptyset)$.

Il reste à montrer que P commute aux inf des parties finies. Par récurrence immédiate, il suffit de traiter le cas de la partie vide est des réunions de deux parties. L'inf de la partie vide dans un treillis est le maximum par la remarque 1.4.5. Il s'agit donc de montrer que $P(X)$ est un élément maximal dans $\mathcal{F}(X)$. Cela découle clairement de la remarque 2.2.7 et de la définition de filtre.

Soit A et B des parties de X . Montrons que $P(A \cap B) = P(A) \wedge P(B)$. Comme P est croissante, on sait déjà par lemme 1.4.9 que $P(A \cap B) \leq P(A) \wedge P(B)$. Ainsi $P(A \cap B)$ est un minorant de $\{P(A), P(B)\}$. On veut montrer que c'est le plus grand. Soit F un minorant de $\{P(A), P(B)\}$. On a donc $F \leq P(A)$, c'est-à-dire $A \in F$ d'après la remarque 2.2.7. De même on obtient $B \in F$. Or F est un filtre donc $A \cap B \in F$, ce qu'une ultime application de la remarque 2.2.7 transforme en $F \leq P(A \cap B)$. $\square$

Corollaire 2.3.4

L'inclusion de $\mathcal{F}(X)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ admet un adjoint à droite $\langle \cdot \rangle : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{F}(X)$. On dit que l'image d'une famille S de parties de X est le filtre engendré par S .

Démonstration: Par construction de la structure de treillis complet sur $\mathcal{F}(X)$, l'inclusion commute au sup donc le théorème 1.4.10 assure l'existence de $\langle \cdot \rangle$. $\square$

Remarque 2.3.5 : On peut être provisoirement déçu que P ne commute pas à tous les inf mais en fait on peut montrer que cette propriété entraînerait immédiatement la surjectivité de P (le lemme 2.4.9 prouvera cela).

Remarque 2.3.6 : Le filtre $\perp \in \mathcal{F}(X)$ sera appelé filtre trivial sur X . Certains livres excluent ce cas dans la définition de filtre. Il s'agit d'un archaïsme qui visait à ne pas avoir à ajouter d'hypothèse de non-trivialité dans certains énoncés mais faisait perdre la structure de treillis et tout ce que nous verrons dans la section suivante.

Exercice 2.4 : On fixe un ensemble X .

1. Montrer directement que $\perp := P(\emptyset)$ est bien un minimum de l'ensemble des filtres sur X . Montrer que, pour tout filtre F sur X , $F = \perp$ si et seulement si $\emptyset \in F$. Notez qu'on pense vraiment à $\perp$ comme étant « la partie vide de X vue comme filtre sur X » mais noter ce filtre $\emptyset$ prêterait à confusion puisqu'il n'est pas vide en tant que partie de l'ensemble des parties de X .

2. Montrer pour tout filtre F sur X et toute fonction $\varphi : X \rightarrow Y$, si $F \neq \perp$ alors $\varphi_* F \neq \perp$.

Dans la démonstration du théorème précédent, les inf de $\mathcal{F}(X)$ étaient offerts par le théorème 1.4.6. Nous verrons dans l'exercice 2.7 que la description explicite de ces inf est assez pénible pour les parties infinies, et elle ne nous servira jamais. Par contre les inf binaires sont faciles à expliciter et cette explicitation est parfois la méthode de démonstration la plus efficace.

Exercice 2.5 : Soit F et G des filtres sur un ensemble X .

1. Montrer que $F \wedge G$ est l'ensemble des intersections d'un élément de F et d'un élément de G :

$$F \wedge G = \{U \subseteq X \mid \exists V \in F, \exists W \in G, U = V \cap W\}.$$

On montrera que l'ensemble de droite est bien un filtre puis que c'est bien l'inf de $\{F, G\}$.

2. En déduire que

$$F \wedge G \neq \perp \Leftrightarrow \forall U \in F, \forall U' \in G, U \cap U' \neq \emptyset.$$

3. Soit F un filtre sur X et A une partie de X . Montrer que les trois énoncés suivants sont équivalents:

1. $F \wedge P(A) = \perp$
2. $F \leq P(A^c)$
3. $\exists A' \in F, A \cap A' = \emptyset$

On pourra par exemple montrer la chaîne d'implications $3. \Rightarrow 2. \Rightarrow 1. \Rightarrow 3.$

Comme promis après le lemme 2.2.10, la structure de treillis sur les filtres permet de traiter toutes les notions usuelles de limites. Par exemple, étant donné un nombre réel x_0 , on peut définir $\mathcal{N}_{x_0}^+ = \mathcal{N}_{x_0} \wedge P([x_0, +\infty[)$, l'ensemble généralisé des réels très proches de x_0 et supérieures à x_0 . On lit cette définition comme l'intersection généralisée de l'ensemble généralisé

$\mathcal{N}_{x_0}$ des réels très proches de x_0 et l'ensemble ordinaire $[x_0, +\infty[$ vu comme ensemble généralisé via P . On a alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0 \Leftrightarrow f_*(\mathcal{N}_{x_0}^+) \leq \mathcal{N}_{y_0}$$

L'exercice suivant vérifie qu'on obtient également une démonstration intuitive d'une version très générale de l'unicité des limites dans $\mathbb{R}$, comme annoncé dans le prologue de ce chapitre.

Exercice 2.6 : Soit x_1 et x_2 des nombres réels.

1. Montrer que si $\mathcal{N}_{x_1} \wedge \mathcal{N}_{x_2} \neq \perp$ alors $x_1 = x_2$.
2. Soit X un ensemble, F un filtre non-trivial sur X et $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_1}$ et $\varphi_* F \leq \mathcal{N}_{x_2}$ alors $x_1 = x_2$.

Lemme 2.3.7

Le treillis des filtres sur un ensemble X est distributif : pour tous filtres F, G et H sur X ,

$$F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \quad \text{et} \quad F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H).$$

Démonstration : On a vu dans l'exercice 1.7 que l'inégalité $(F \wedge G) \vee (F \wedge H) \leq F \wedge (G \vee H)$ est vraie dans tous les treillis. Montrons donc $F \wedge (G \vee H) \leq (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$. Soit $U \in (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$. Montrons que $U \in F \wedge (G \vee H)$. On sait que le sup dans $\mathcal{F}(X)$ provient de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ donc $U \in F \wedge G$ et $U \in F \wedge H$. L'exercice 2.5 fournit V et V' dans F , W dans G et S dans H tels que $U = V \cap W = V' \cap S$. On calcule alors $(V \cap V') \cap (W \cup S) = U$ où $V \cap V' \in F$ et $W \cup S \in G \vee H$ donc $U \in F \wedge (G \vee H)$.

L'autre formule de distributivité découle de celle que nous venons de démontrer. Il s'agit d'un fait général pour tous les treillis. En effet pour des éléments x, y et z d'un treillis dans lequel $\wedge$ distribue sur $\vee$, on peut calculer :

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{par hypothèse} \\ &= x \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{car } x \leq x \vee y \\ &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) && \text{par hypothèse} \\ &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) && \text{par associativité de } \vee \\ &= x \vee (y \wedge z) && \text{car } x \geq x \wedge z \quad \square \end{aligned}$$

Pour finir cette section on peut se convaincre par l'exercice suivante que la description explicite des inf dans $\mathcal{F}(X)$ est vraiment peu agréable. Cet exercice ne sera jamais utilisé dans la suite.

Exercice 2.7 : Soit X un ensemble. Dans cet exercice on montre de façon élémentaire explicite que $\mathcal{F}(X)$ est un treillis complet en construisant à la main des infimums. Soit S un ensemble de filtres sur X .

1. Montrer que

$$\left\{ U \subseteq X \mid \exists S' \subseteq S \text{ fini, } \exists V : S' \rightarrow \mathcal{P}(X), U = \bigcap_{\{s' \in S'\}} V_{s'} \text{ et } \forall s' \in S', V_{s'} \in s' \right\}$$

est un filtre sur X et que ce filtre est borne inférieure de S .

2. Écrire une version plus simple de la définition précédente dans le cas où S est filtrante, c'est-à-dire que S n'est pas vide et $\forall x y \in S, \exists z \in S, z \leq x$ et $z \leq y$.

2.4. Image directe et image réciproque d'un filtre

Dans la section 2.2, nous avons défini de façon complètement ad-hoc la notion d'image directe d'un filtre par une application. Cette définition nous a permis de reformuler les notions usuelles de limite de façon plus intuitive, mais on aimerait une motivation plus intrinsèque de la définition. On veut également étendre la notion d'image réciproque et établir plus de propriétés de ces opérations. Toutes les propriétés fondamentales de ces extensions sont contenues dans l'énoncé suivant. Les nombreuses autres propriétés s'en déduisent.

Théorème 2.4.1

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre deux ensembles. Il existe une unique paire de fonctions adjointes $f_* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ et $f^* : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ qui étende la paire $f_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ et $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightleftharpoons[f^*]{f_*} & \mathcal{P}(Y) \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ \mathcal{F}(X) & \xrightleftharpoons[f^*]{f_*} & \mathcal{F}(Y) \end{array}$$

De même $f_!$ (de l'exemple 1.4.11) s'étend de façon unique en préservant l'adjonction avec f^* .

En particulier toutes ces extensions sont croissantes.

De plus elles sont compatibles avec les applications identité :

$$(\text{Id}_X)_* = (\text{Id}_X)^* = (\text{Id}_X)_! = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)},$$

et avec la composition

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*, \quad (g \circ f)_! = g_! \circ f_!.$$

Dans cet énoncé, l'unicité est un peu subtile. En effet demander la condition d'extension ne suffit pas à obtenir l'unicité, la condition d'adjonction est cruciale. Par exemple, on pourrait définir $f_{\#} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ comme étant $P \circ f_* \circ K$ où K est l'application noyau du lemme 2.3.2 et on aurait bien $f_{\#} \circ P = P \circ f_*$ puisque $K \circ P = \text{Id}$.

Comme promis, cet énoncé permet d'énoncer et de démontrer les 4096 lemmes du prologue de ce chapitre.

Corollaire 2.4.2 (*Composition de limites*)

Soit X, Y et Z des ensembles, $F \in \mathcal{F}(X), G \in \mathcal{F}(Y), H \in \mathcal{F}(Z), \varphi : X \rightarrow Y$ et $\psi : Y \rightarrow Z$. Si $\varphi_* F \leq G$ et $\psi_* G \leq H$ alors $(\psi \circ \varphi)_* F \leq H$.

Démonstration: Supposons $\varphi_* F \leq G$ et $\psi_* G \leq H$. On calcule

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)_* F &= \psi_* \varphi_* F \text{ par compatibilité avec la composition} \\ &\leq \psi_* G \quad \text{car } \psi_* \text{ est croissante et } \varphi_* F \leq G \\ &\leq H \quad \text{par hypothèse} \end{aligned}$$

□

Exercice 2.8 : Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre deux ensemble et F un filtre sur X . Nous avons vu que $f_* F = \perp \Leftrightarrow F = \perp$. Donner une démonstration plus efficace en utilisant le théorème 2.4.1 plutôt que la construction explicite de f_* . On pourra utiliser que, pour tout élément z d'un ensemble ordonné ayant un minimum, $z = \perp \Leftrightarrow z \leq \perp$.

Nous allons donner deux démonstrations indépendantes du théorème 2.4.1. La première sera une démonstration concrète définissant explicitement les applications f_* , f^* et $f_!$ et vérifiant à la main la commutativité des diagrammes et les relations d'adjonction. La seconde démonstration déduira le théorème d'une propriété universelle des filtres. Cette propriété universelle permet d'étendre abstraitement de nombreuses autres propriétés de $\mathcal{P}(X)$ à $\mathcal{F}(X)$. De plus la construction abstraite se généralise bien mieux (en particulier à la notion de complétion projective d'une catégorie). Cependant ce point de vue abstrait n'est jamais indispensable. Dans toute la suite nous proposerons toujours des alternatives concrètes.

Approche concrète

Dans cette approche du théorème 2.4.1, on donne des formules explicites pour l'image directe et l'image réciproque d'un filtre comme ensembles de parties. Bien sûr il faut vérifier que ces formules définissent des filtres (comme nous l'avons déjà fait pour l'image directe), avant de vérifier les propriétés annoncées.

Lemme 2.4.3

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre ensembles.

- Pour tout filtre F sur X ,

$$f_* F = \{V \subseteq Y \mid f^* V \in F\}$$

est un filtre sur Y .

Pour tout $U \in F$, $f_* U \in f_* F$ (mais les éléments de $f_* F$ ne sont pas tous de cette forme).

- Pour tout filtre G sur Y ,

$$f^* G = \{U \subseteq X \mid f_! U \in G\}.$$

est un filtre sur X . De plus, pour tout $U \subseteq X$, $U \in f^* G \Leftrightarrow \exists V \in G, f^* V \subseteq U$.

En particulier, pour tout $V \in G$, $f^* V \in f^* G$ (mais les éléments de $f^* G$ ne sont pas tous de cette forme).

- Pour tout filtre F sur X ,

$$f_!F = \{V \subseteq Y \mid \exists U \in F, V = f_!U\}$$

est un filtre sur Y .

Démonstration: Soit F un filtre sur X et G un filtre sur Y . On peut montrer que f_*F et f^*G sont des filtres en utilisant exactement la même structure de démonstration car f^* et $f_!$ agissant sur les parties sont des adjoints à droite, ce qui implique qu'ils sont croissant, envoient $\top$ sur $\top$ et commutent aux intersections (bien sûr nous avons déjà montré que la formule pour f_* définit un filtre dans la section 2.2 mais ici nous recherchons une approche plus systématique).

Voyons le cas de f_* . Comme $f^*\top = \top$ et $\top \in F$, on obtient $\top \in f_*F$ (dans $\mathcal{P}(X)$, $\top = X$ et dans $\mathcal{P}(Y)$, $\top = Y$). Soit $V \subseteq W \subseteq Y$. Supposons $V \in f_*F$, c'est-à-dire $f^*V \in F$. Comme f^* est croissante on obtient $f^*V \subseteq f^*W$ et donc $f^*W \in F$, c'est-à-dire $W \in f_*F$. Soit V et W dans f_*F . Comme f^* est un adjoint à droite, $f^*(V \cap W) = f^*V \cap f^*W \in F$.

Montrons maintenant que, pour tout $U \in F$, $f_*U \in f_*F$. Soit $U \in F$. Par co-unité de $f_* \dashv f^*$ on a $U \subseteq f^*f_*U$ donc $f^*f_*U \in F$, c'est-à-dire $f_*U \in f_*F$. Cependant les éléments de f_*F ne sont pas tous de cette forme. Par exemple, Y est toujours dans f_*F mais n'est pas nécessairement l'image d'une partie de X par f .

Le même raisonnement en utilisant $f^* \dashv f_!$ montre que, pour tout $V \in G$, $f^*V \in f^*G$. Cependant les éléments de f^*G ne sont pas nécessairement de cette forme. Par exemple, si $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$ et $f = (x \mapsto c)$ alors $f^*P(\{d\}) = \perp$ contient $\{b\}$ qui n'est l'image réciproque d'aucune partie de Y . Les mêmes propriétés de $f_!$ sur les parties montrent également directement que $f_!F$ est un filtre.

Montrons maintenant la formule alternative pour f^*G . On procède par double inclusion. Soit $U \in f^*G$. Montrons qu'il existe $V \in G$ tel que $f^*V \subseteq U$. Montrons que $f_!U$ convient. On sait qu'il est dans G par définition de f^*G et hypothèse sur U . De plus $f^*f_!U \subseteq U$ par co-unité de $f^* \dashv f_!$. Réciproquement, soit $V \in G$ et U tel que $f^*V \subseteq U$. Montrons que $U \in f^*G$. On a vu que $f^*V \in f^*G$ et f^*G est un filtre donc $U \in f^*G$. $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème 2.4.1.

Démonstration: Montrons que les opérations définies dans le lemme 2.4.3 commutent avec P . Les ingrédients de la démonstration sont simplement la définition de P et les adjonctions $f_* \dashv f^*$ et $f^* \dashv f_!$ entre $\mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{P}(Y)$.

On commence par $f_* \circ P = P \circ f_*$. Soit $U \subseteq X$. Soit $V \subseteq Y$. On a

$$\begin{aligned} V \in f_*P(U) &\Leftrightarrow f^*V \in P(U) \text{ par définition de } f_* \\ &\Leftrightarrow U \subseteq f^*V \text{ par définition de } P \\ &\Leftrightarrow f_*U \subseteq V \text{ car } f_* \dashv f^* \text{ entre les parties} \\ &\Leftrightarrow V \in P(f_*U) \text{ par définition de } P. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $f^* \circ P = P \circ f^*$. Soit $V \subseteq Y$. Soit $U \subseteq X$. On a

$$\begin{aligned} U \in f^*P(V) &\Leftrightarrow f_!U \in P(V) \quad \text{par définition de } f^* \\ &\Leftrightarrow V \subseteq f_!U \quad \text{par définition de } P \\ &\Leftrightarrow f^*V \subseteq U \quad \text{car } f^* \dashv f_! \text{ entre les parties} \\ &\Leftrightarrow U \in P(f^*V) \quad \text{par définition de } P. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant la propriété d'adjonction $f_* \dashv f^*$ entre $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{F}(Y)$. Soit F un filtre sur X et G un filtre sur Y . Montrons que $f_*F \leq G \Leftrightarrow F \leq f^*G$. On montre les deux implications. Supposons $f_*F \leq G$ et montrons que $F \leq f^*G$. Soit $U \in f^*G$. Montrons que $U \in F$. Par définition de f^*G , on a $f_!U \in G$. Comme on a supposé $f_*F \leq G$, on en déduit $f_!U \in f_*F$, c'est-à-dire $f^*f_!U \in F$. Or $f^*f_!U \subseteq U$ par co-unité de l'adjonction $f^* \dashv f_!$ donc $U \in F$.

Réciproquement, supposons $F \leq f^*G$ et montrons que $f_*F \leq G$. Soit $V \in G$. Montrons que $V \in f_*F$, c'est-à-dire $f^*V \in F$. Comme $V \in G$, $f^*V \in f^*G$. Or on a supposé $F \leq f^*G$ donc $f^*V \in F$.

Montrons maintenant que les définitions du lemme 2.4.3 sont les seules possibles. Il suffit de montrer l'unicité de l'extension de f^* puisque cette extension a au plus un adjoint à gauche et un adjoint à droite d'après le lemme 1.3.13. Pour cela la clef est la remarque 2.2.7 et l'hypothèse qu'il existe une extension de $f_!$ qui est adjointe à droite de l'extension de f^* .

Soit G un filtre sur Y et $U \subseteq X$. On a :

$$\begin{aligned} U \in f^*G &\Leftrightarrow f^*G \leq P(U) \quad \text{par la remarque 2.2.7} \\ &\Leftrightarrow G \leq f_!P(U) \quad \text{par adjonction supposée} \\ &\Leftrightarrow G \leq P(f_!U) \quad \text{car } f_! \text{ étend } f_! \\ &\Leftrightarrow f_!U \in G \quad \text{par la remarque 2.2.7.} \end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, il est crucial d'avoir un adjoint à droite de la fonction qu'on cherche à caractériser. La même stratégie permet également de retrouver directement la définition de f_* sur les filtres.

Les compatibilités avec l'identité et la composition découlent directement des propriétés analogues avant extension. Par exemple, étant donnés $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ et $F \in \mathcal{F}(X)$, on calcule

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*F &= \{W \mid (g \circ f)^*W \in F\} \\ &= \{W \mid f^*g^*W \in F\} \\ &= \{W \mid g^*W \in f_*F\} \\ &= \{W \mid W \in g_*f_*F\} \end{aligned}$$

□

Approche abstraite

Nous allons maintenant redémontrer le théorème 2.4.1 d'une façon plus abstraite qui met en valeur la nature profonde du lien entre parties d'un ensemble X et filtres sur X .

Le point de départ est l'observation que les bornes inférieures dans $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas adaptées à nos objectifs. Par exemple, on voudrait pouvoir définir pour x dans un espace topologique

$$\mathcal{N}_x \stackrel{?}{=} \bigcap_{U \text{ voisinage de } x} U$$

mais cela ne donne pas le bon résultat (dans un espace métrique par exemple, cela donne toujours $\{x\}$). L'idée est de remplacer les intersections de $\mathcal{P}(X)$ par des intersections « formelles » qui « ne vérifient aucune relation ».

Pour préciser cette idée qui peut sembler très vague, il est utile de faire une analogie avec la notion d'algèbre de polynômes. Partant d'un anneau commutatif R , on obtient la R -algèbre $R[X]$ des polynômes à coefficient dans R en ajoutant un élément « formel » X qui engendre $R[X]$ et ne vérifie aucune relation au-delà de celles qui sont imposées par la définition de R -algèbre. On peut contraster cela avec le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ qui ajoute un élément formel i mais en imposant la relation $i^2 = -1$ qui ne découle absolument pas de la définition de $\mathbb{R}$ -algèbre. Il est cruciale de comprendre que cette absence de relation vérifiée par X s'incarne dans la propriété universelle de la paire $(R[X], X)$: pour toute autre paire (A, a) où A est une R -algèbre et $a \in A$, il existe un unique morphisme $\text{ev}_a : R[X] \rightarrow A$ de R -algèbre qui envoie X sur a (ce morphisme est appelé évaluation en a , il envoie $\sum_i c_i X^i$ sur $\sum_i c_i a^i$). Si X vérifiait des relations dans $R[X]$, il n'y aurait pas existence sans imposer de relation à a . Si X n'engendrait pas $R[X]$ comme R -algèbre alors il n'y aurait pas unicité. Comme toutes les propriétés universelles, cette propriété caractérise $R[X]$ modulo unique isomorphisme. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 2.4.4

Soit B une R -algèbre et $b \in B$. On suppose que, pour toute R -algèbre A et tout $a \in A$, il existe un unique morphisme de R -algèbre de B vers A qui envoie b sur a . Alors il existe un unique morphisme de R -algèbre de B vers $R[X]$ qui envoie b sur X et c'est un isomorphisme.

Démonstration : L'hypothèse sur B fournit directement un unique morphisme $\varphi : B \rightarrow R[X]$ tel que $\varphi(b) = X$. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme. La propriété universelle de $R[X]$ fournit un morphisme de R -algèbres $\psi : R[X] \rightarrow B$ qui envoie X sur b . Montrons que $\psi \circ \varphi = \text{Id}_B$. L'unicité dans la propriété universelle de B appliquée à $A = B$ et $a = b$ assure qu'il n'y a qu'un morphisme de R -algèbre de B dans B qui envoie b sur b . Or Id_B et $\psi \circ \varphi$ ont tous deux cette propriété. Donc $\psi \circ \varphi = \text{Id}_B$. De même on montre que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{R[X]}$ en utilisant l'unicité dans la propriété universelle de $R[X]$ appliquée à $A = R[X]$ et $a = X$. $\square$

Avant d'énoncer la propriété analogue pour les filtres, il convient de préciser quelles intersections sont visées. Dans le cas de $\mathcal{N}_{+\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ ou de $\mathcal{N}_{x_0} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ il s'agit d'intersections de familles décroissantes de parties. Ces familles sont $N \mapsto [N, +\infty[$ quand N augmente dans le

premier cas, et $\varepsilon \mapsto]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ quand ε décroît vers 0 dans le second. Dans le cas général, il n'y a pas d'ensemble ordonné pouvant naturellement servir à fournir des paramètres. De plus les parties qui nous intéressent vraiment ne sont pas seulement les $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ mais tous les voisinages de x_0 . Pour ces raisons, la bonne définition est la suivante.

Définition 2.4.5

Une partie S d'un ensemble ordonné X est filtrante (à gauche) si elle n'est pas vide et, $\forall x, y \in S, \exists z \in S, z \leq x$ et $z \leq y$.

On notera en particulier que les éléments d'un filtre sur un ensemble A forment une partie filtrante de $\mathcal{P}(A)$.

Les fonctions qui joueront le rôle des morphismes de R -algèbre dans notre analogie polynômiale sont celles qui vérifient la condition suivante.

Définition 2.4.6

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction entre treillis complets. On dit que f commute aux infs filtrants si, pour tout $S \subseteq X$,

$$S \text{ filtrante} \Rightarrow f(\inf S) = \inf f_* S.$$

On montrera dans le lemme 2.4.10 que cette condition est plus forte que celle d'être croissante mais elle est plus faible que le fait de commuter avec tous les infs (c'est-à-dire d'être un adjoint à droite).

On peut maintenant énoncer le théorème majeur de cette section.

Théorème 2.4.7 (Propriété universelle des filtres)

Soit Z un treillis complet. Soit $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow Z$ une application croissante. Il existe une unique fonction $\bar{\varphi} : \mathcal{F}(X) \rightarrow Z$ telle que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ P \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\varphi} & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$

- $\bar{\varphi}$ étend φ : $\bar{\varphi} \circ P = \varphi$
- $\bar{\varphi}$ commute aux infs filtrants : pour toute partie $S \subseteq \mathcal{F}(X)$ filtrante,

$$\bar{\varphi}(\inf S) = \inf_{F \in S} \bar{\varphi}(F).$$

De plus la fonction $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ est croissante.

Comme dans le cas des polynômes, l'unicité de $\bar{\varphi}$ signifie que $\mathcal{F}(X)$ est engendré en un sens par l'image de P (l'énoncé précis sera le lemme 2.4.9) et l'existence de $\bar{\varphi}$ correspond à l'affirmation vague que les infs filtrants dans $\mathcal{F}(X)$ ne vérifient aucune « relation » qui nécessiterait d'ajouter des hypothèses sur φ .

Comme dans le cas des polynômes, nous pouvons déjà noter que la propriété universelle exprimée dans le théorème caractérise $(\mathcal{F}(X), P)$.

Exercice 2.9 : Soit X un ensemble et Y un treillis complet muni d'une fonction croissante $\rho : \mathcal{P}(X) \rightarrow Y$ vérifiant la propriété universelle des filtres: pour tout treillis complet Z et tout $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow Z$ croissante, il existe un unique $\bar{\varphi} : Y \rightarrow Z$ qui commute aux inf filtrants et vérifie $\bar{\varphi} \circ \rho = \varphi$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme d'ensembles ordonnés $\psi : Y \rightarrow \mathcal{F}(X)$ tel que $\psi \circ \rho = P$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes pour démontrer ce théorème, à la fois portant sur les parties filtrantes en général et sur notre situation spécifique.

Lemme 2.4.8

L'image directe d'une partie filtrante par une application croissante est filtrante.

Démonstration: Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction croissante entre ensembles ordonnés. Soit $A \subseteq X$ filtrante: Montrons que f_*A est filtrante. Soit y et y' dans f_*A . Par définition de l'image directe on obtient a et a' dans A tels que $y = f(a)$ et $y' = f(a')$. Comme A est filtrante, on obtient a'' dans A inférieur à a et a' . Comme f est croissante $f(a'')$ est inférieur à y et y' , et $f(a'')$ est bien dans f_*A . $\square$

Voici maintenant l'énoncé d'engendrement promis, analogue au fait que tout polynôme s'écrit de façon unique comme somme de monômes.

Lemme 2.4.9

Tout filtre F est « tautologiquement » un inf filtrant de filtres principaux:

$$F = \inf_{U \in F} P(U).$$

Démonstration: Par définition des filtres, F vu comme partie de $\mathcal{P}(X)$ est filtrant. Comme P est croissante, le lemme 2.4.8 assure que $\{P(U); U \in F\}$ est filtrante.

Il reste à voir que F est bien un inf de cette partie de $\mathcal{F}(X)$. Soit F' un filtre sur X .

$$\begin{aligned} F' \text{ minore } \{P(U); U \in F\} &\Leftrightarrow \forall U \in F, F' \leq P(U) \\ &\Leftrightarrow \forall U \in F, U \in F' \\ &\Leftrightarrow F' \leq F \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 2.10 : Montrer que tout filtre sur un ensemble fini est principal.

Comme promis, le fait de commuter aux inf filtrants est un renforcement de la condition de croissance.

Lemme 2.4.10

Tout fonction qui commute aux inf filtrants est croissante.

Démonstration: C'est le même argument que dans la démonstration du théorème 1.4.10. Soit $f : X \rightarrow Y$ une telle fonction. Soit x et x' dans X tels que $x \leq x'$. L'ensemble $\{x, x'\}$ est filtrant et $\inf\{x, x'\} = x$ donc $f(x) = \inf\{f(x), f(x')\}$ et donc $f(x) \leq f(x')$. $\square$

Lemme 2.4.11

Soit X un ensemble ordonné. Soit Y et Z deux treillis complets. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction croissante et $g : Y \rightarrow Z$ une fonction qui commute aux inf filtrants. Pour tout $A \subseteq X$,

$$A \text{ filtrante} \Rightarrow g\left(\inf_{a \in A} f(a)\right) = \inf_{a \in A} (g \circ f)(a).$$

Démonstration: Soit $A \subseteq X$ filtrante. Comme f_* est croissante, le lemme 2.4.8 assure que f_*A est filtrante.

On calcule ensuite

$$g\left(\inf_{a \in A} f(a)\right) = g(\inf(f_*A)) = \inf(g_*f_*A) = \inf((g \circ f)_*A) = \inf_{a \in A} (g \circ f)(a). \quad \square$$

Nous avons vu dans la section précédente que, par construction, les sups dans $\mathcal{F}(X)$ proviennent de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ mais pas les inf. Cependant les inf filtrants proviennent de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$.

Lemme 2.4.12

L'inclusion de $\mathcal{F}(X)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ commute aux inf filtrants : pour toute partie filtrante X de $\mathcal{F}(X)$, $\inf S = \bigcup_{F \in S} F$.

Démonstration: Comme la réunion est un inf dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$, il suffit de montrer qu'il s'agit d'un filtre.

Elle contient X car S n'est pas vide et chacun de ses éléments contient X .

Soit $U \in \bigcup_{F \in S} F$ et $V \supseteq U$. Par définition de la réunion, on obtient $F_0 \in S$ tel que $U \in F_0$. Comme F_0 est un filtre et $U \subseteq V$, on en déduit $V \in F_0$ et donc $V \in \bigcup_{F \in S} F$.

Soit U et V dans $\bigcup_{F \in S} F$. Par définition de la réunion, on obtient F_0 et F_1 dans S tels que $U \in F_0$ et $V \in F_1$. Comme S est filtrante, on obtient $F_2 \in S$ inférieur à F_0 et F_1 . On a donc $U \in F_2$ et $V \in F_2$ et donc $U \cap V \in F_2$ et enfin $U \cap V \in \bigcup_{F \in S} F$. $\square$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour démontrer la propriété universelle des filtres.

Démonstration du théorème 2.4.7: Montrons d'abord l'unicité. Soit $\overline{\varphi}$ une extension comme dans l'énoncé. Soit F un filtre sur X . On a vu dans le théorème 2.3.3 que P est croissante et supposé que $\overline{\varphi}$ commute aux inf filtrants. On peut donc calculer

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(F) &= \overline{\varphi}\left(\inf_{U \in F} P(U)\right) && \text{par le lemme 2.4.9} \\
&= \inf_{U \in F} (\overline{\varphi} \circ P)(U) && \text{par le lemme 2.4.11} \\
&= \inf_{U \in F} \varphi(U) && \text{car } \overline{\varphi} \circ P = \varphi
\end{aligned}$$

qui ne dépend que de φ et F .

Pour l'existence la voie est claire : il faut vérifier que la fonction $\overline{\varphi}$ définie par la formule ci-dessus convient.

Montrons qu'elle étend φ . Soit $V \in \mathcal{P}(X)$.

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(P(V)) &= \inf_{U \in P(V)} \varphi(U) && \text{par définition de } \overline{\varphi} \\
&= \inf \varphi_* \{U \mid U \in P(V)\} \\
&= \inf \varphi_* \{U \mid V \subseteq U\} && \text{par définition de } P \\
&= \varphi(V) && \text{par l'exercice 1.13}
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\overline{\varphi}$ commute aux infis filtrants. Soit $S \subseteq \mathcal{F}(X)$ une partie filtrante.

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(\inf S) &= \inf_{U \in \inf S} \varphi(U) && \text{par définition de } \overline{\varphi}. \\
&= \inf_{U \in \bigcup_{F \in S} F} \varphi(U) && \text{par le lemme 2.4.12} \\
&= \inf_{F \in S} \left(\inf_{U \in F} \varphi(U) \right) && \text{par l'exercice 1.12} \\
&= \inf_{F \in S} (\overline{\varphi}(F)) && \text{par définition de } \overline{\varphi}.
\end{aligned}$$

Montrons que $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ est croissante. Soit φ et φ' deux fonctions de $\mathcal{P}(X)$ dans Z . Supposons $\varphi \leq \varphi'$. Montrons que $\overline{\varphi} \leq \overline{\varphi'}$. Soit $F \in \mathcal{F}(X)$. On veut $\inf_{U \in F} \varphi(U) \leq \inf_{U \in F} \varphi'(U)$. Il suffit de montrer que $\inf_{U \in F} \varphi(U)$ minore les valeurs de φ' sur F . Soit $U_0 \in F$. On a $\inf_{U \in F} \varphi(U) \leq \varphi(U_0) \leq \varphi'(U_0)$ puisque $\varphi \leq \varphi'$. $\square$

Corollaire 2.4.13

Soit $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une fonction croissante. Il existe une unique extension $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ qui commute aux infis filtrants.

La fonction $f \mapsto \hat{f}$ est croissante.

De plus, $\widehat{\text{Id}_{\mathcal{P}(X)}} = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$ et, pour toute fonction $g : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$, on a $\widehat{g \circ \hat{f}} = \hat{g} \circ \hat{f}$.

Démonstration: Pour l'existence et l'unicité de $\hat{f}$, il suffit d'appliquer le théorème à la fonction croissante $P \circ f$.

La croissance de $f \mapsto \hat{f}$ découle immédiatement de la croissance du théorème puisque composer à gauche par la fonction croissante P est une opération croissante.

Comme $\text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$ commute aux inf filtrants et $\text{Id}_{\mathcal{F}(X)} \circ P = P \circ \text{Id}_{\mathcal{P}(X)}$, l'unicité de l'extension assure que $\widehat{\text{Id}_{\mathcal{P}(X)}} = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$.

Montrons maintenant la formule de composition. On utilise le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}(Y) & \xrightarrow{g} & \mathcal{P}(Z) \\ P \downarrow & & P \downarrow & & P \downarrow \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\hat{g}} & \mathcal{F}(Z) \end{array}$$

On sait que les deux petits rectangles commutent, donc le grand rectangle commute. De plus $\hat{g} \circ \hat{f}$ commute aux inf filtrants donc l'unicité de l'extension assure $\hat{g} \circ \hat{f} = \widehat{g \circ f}$. $\square$

Corollaire 2.4.14

Soit X et Y des ensembles. Soit $l : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ et $r : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ des applications adjointes. Les extensions $\hat{l}$ et $\hat{r}$ fournies par le corollaire 2.4.13 forment également une adjonction.

Démonstration: On sait que $\hat{l}$ et $\hat{r}$ commutent aux inf filtrants donc sont croissantes par le lemme 2.4.10. D'après le lemme 1.3.10, il suffit de montrer les inégalité d'unité et de co-unité. Ce même lemme assure ces inégalités pour l et r . La propriété de croissance et la compatibilité aux identités et aux compositions dans le corollaire 2.4.13 terminent le travail. $\square$

Le corollaire 2.4.13 et le corollaire 2.4.14 démontrent clairement le théorème 2.4.1.

L'unicité dans la propriété universelle des filtres permet également d'étendre facilement des propriétés de $\mathcal{P}(X)$ à $\mathcal{F}(X)$. Voici un exemple :

Lemme 2.4.15

Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction. Pour tout filtre F sur X et tout filtre G sur Y , on a $\varphi_*(F \wedge \varphi^*G) = \varphi_*F \wedge G$.

Démonstration: On peut vérifier directement l'énoncé analogue pour les parties de X dans Y . On en déduit que, pour tout partie B de X et tout filtre F sur X , $\varphi_*(F \wedge \varphi^*P(B)) = \varphi_*F \wedge P(B)$. En effet les fonctions $F \mapsto \varphi_*(F \wedge \varphi^*P(B))$ et $F \mapsto \varphi_*F \wedge P(B)$ commutent aux infs filtrants donc il suffit de montrer qu'elles ont même précomposition par P . Soit A une partie de X . On a

$$\begin{aligned} \varphi_*(P(A) \wedge \varphi^*P(B)) &= \varphi_*(P(A) \wedge P(\varphi^*B)) \\ &= \varphi_*(P(A \cap \varphi^*B)) \\ &= P(\varphi_*(A \cap \varphi^*B)) \\ &= P(\varphi_*A \cap B) \\ &= P(\varphi_*A) \wedge P(\varphi_*B) \\ &= \varphi_*P(A) \wedge \varphi_*P(B) \end{aligned}$$

Puis on en déduit le résultat annoncé en observant que, à F fixé, les fonctions $G \mapsto \varphi_*(F \wedge \varphi^*G)$ et $G \mapsto \varphi_*F \wedge G$ commutent aux infs filtrants. $\square$

Exercice 2.11 : Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction injective. Montrer que $\varphi^* \circ \varphi_* = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$.

Exercice 2.12 : Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que, pour tout filtre G sur Y , $\varphi_*\varphi^*G = G \wedge P(\varphi_*X)$.

On termine cette section avec un énoncé sur les filtres et les inclusions qui sera utile dans un chapitre ultérieur.

Exercice 2.13 : Soit X un ensemble et A une partie de X . On note ι l'inclusion de A dans X . Montrer que ι_* induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre $\mathcal{F}(A)$ et $\{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \leq P(A)\}$ d'inverse ι^* .

2.5. Ultrafiltres

On a vu que les filtres sur un ensemble X sont des généralisations des parties de X . L'ensemble X lui-même s'injecte dans les parties de X par l'application singleton $x \mapsto \{x\}$. Son image est caractérisée par une propriété de minimalité : les singletons sont les parties non-vides minimales. Cette propriété de minimalité reste vrai dans $\mathcal{F}(X)$ mais elle ne caractérise plus les singletons : il existe des singletons généralisés.

Définition 2.5.1

Soit X un ensemble ordonné. Un élément x_o de X est dit minimal si, $\forall x \leq x_o, x = x_o$.

Il ne faut pas confondre cette notion avec la notion d'élément minimum qui est beaucoup forte. En particulier un ensemble ordonné a au plus un élément minimum alors qu'il peut avoir de nombreux éléments minimaux. Il y a deux exemples à garder en tête ici. On a déjà vu celui des singletons dans $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. L'autre exemple est celui des entiers naturels premiers qui sont minimaux pour la relation de divisibilité sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Définition 2.5.2

Un ultrafiltre sur un ensemble X est un singleton généralisé de X , c'est-à-dire un filtre minimal parmi les filtres non-triviaux.

Comme dans le cas des nombres premiers, on peut caractériser les ultrafiltres par un énoncé de type « lemme de Gauss ».

Définition 2.5.3

Un filtre F sur un ensemble X est premier si, pour toutes parties A et B de X , $A \cup B \in F \Rightarrow A \in F$ ou $B \in F$.

Lemme 2.5.4

Un filtre F est un ultrafiltre si et seulement il est non trivial et premier.

Démonstration: Soit F un filtre sur X .

Supposons d'abord que F est un ultrafiltre et montrons qu'il est premier. Soit A et B des parties de X tels que $A \cup B \in F$. Autrement dit $F \leq P(A \cup B)$ par la remarque 2.2.7. Supposons par l'absurde que ni A ni B ne soient dans F . On a alors $\text{non}(F \leq P(A))$ et donc¹ $F \wedge P(A) < F$. Par minimalité de F , on en déduit que $F \wedge P(A) = \perp$. De même on obtient $F \wedge P(B) = \perp$. Par ailleurs le théorème 2.3.3 et le lemme 2.3.7 assurent que

$$F = F \wedge P(A \cup B) = F \wedge (P(A) \vee P(B)) = (F \wedge P(A)) \vee (F \wedge P(B)) = \perp \vee \perp = \perp$$

ce qui est absurde car un ultrafiltre est non trivial (par définition).

Réciproquement, supposons que F est premier et non trivial et montrons qu'il s'agit d'un ultrafiltre. Soit G un filtre sur X tel que $\perp < G \leq F$. Montrons que $G = F$. Il suffit de montrer que $F \leq G$. Soit $U \in G$. Montrons que $U \in F$. On a $U \cup U^c = X \in F$ et F est premier donc $U \in F$ ou $U^c \in F$. Montrons que le second cas ne peut pas arriver. Supposons $U^c \in F$. Comme $G \leq F$ on en déduit $U^c \in G$ et donc $\emptyset = U \cap U^c \in G$, ce qui contredit $\perp < G$. $\square$

Une grande partie de la puissance de la notion d'ultra-filtre provient d'un lemme/axiome très général qui en garantira l'existence.

Axiome 2.5.5 (Lemme de Zorn)

Soit Z un ensemble ordonné. Si toute partie totalement ordonnée de Z admet un minorant (resp. un majorant) alors Z admet un élément minimal (resp. maximal).

Il faut penser à cet énoncé comme à un principe de récurrence très patiente. On commence avec la partie vide de Z . Comme elle est totalement ordonnée, l'hypothèse nous fournit z_0 (qui minore la partie vide...). Si z_0 est minimal alors c'est gagné. Sinon on obtient z_1 tel que $z_1 < z_0$. Si z_1 est minimal c'est gagné. Sinon on obtient $z_2 < z_1$. Par récurrence ordinaire (pas spécialement patiente), on trouve soit un élément minimal soit une suite $z : \mathbb{N} \rightarrow Z$ strictement décroissante. L'image $z_*\mathbb{N}$ de cette suite est une partie totalement ordonnée de Z . L'hypothèse nous fournit un minorant w_0 de z_*S . Et on continue ainsi (très patiemment). L'axiome de Zorn affirme que ce processus finit par s'arrêter. On peut le démontrer à partir de l'axiome du choix (on notera que le processus décrit ci-dessus nécessite effectivement de faire beaucoup de choix).

Théorème 2.5.6 (Lemme de l'ultrafiltre)

Pour tout filtre F non trivial, il existe un ultrafiltre U tel que $U \leq F$. Autrement dit, toute partie généralisée non vide contient un singleton généralisé.

Démonstration: Soit F un filtre non trivial. On pose $Z := \{G \in \mathcal{F}(X) \mid \perp < G \leq F\}$. Ainsi on veut un élément minimal de Z . Montrons que Z vérifie les conditions du lemme de Zorn (axiome 2.5.5).

¹Il faut se méfier ici car la négation de $F \leq P(A)$ n'est pas $P(A) < F$. On utilise ici la contraposée de l'implication $F \wedge P(A) = F \Rightarrow F \leq P(A)$ pour obtenir $F \wedge P(A) \neq F$ puis on conclut par le fait que $F \wedge P(A) \leq F$.

Soit S une partie totalement ordonnée de $\mathcal{F}(X)$. On peut supposer que S n'est pas vide, car sinon F minore S . Ainsi S est filtrante. Montrons que l'infimum de S dans $\mathcal{F}(X)$ est un minorant de S dans Z . Montrons que $\inf S \leq F$. Comme $S \neq \emptyset$, on obtient $G \in S$. En particulier $G \in Z$ et on a $\inf S \leq G \leq F$. Montrons maintenant que $\inf S$ n'est pas trivial. Supposons que $\inf S$ est trivial. On a donc $\emptyset \in \inf S$. Le lemme 2.4.12 fournit $G \in S$ tel que $\emptyset \in G$. Ce G est trivial, ce qui contredit l'hypothèse $S \subseteq Z$. $\square$

Exercice 2.14 : Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que l'image directe par f d'un singleton dans X est un singleton dans Y . On veut maintenant le résultat analogue pour les « singletons généralisés ». Soit F un ultra-filtre sur X . Montre que l'image directe par f de F est un ultra-filtre sur Y .

Exercice 2.15 : Soit F un filtre sur un ensemble X . Montrer que F est le sup de l'ensemble des ultra-filtres inférieurs à F (cet exercice est plus difficile que les autres). Quel est l'énoncé analogue pour une partie de X ?

Chapitre 3.

Catégories

3.1. Prologue

La notion de composition et d'élément neutre joue un rôle central en mathématique. Elle recouvre de nombreux concepts. Dès le début de l'apprentissage mathématique, on rencontre des lois de composition interne, par exemple l'addition et la multiplication des entiers, avec les neutres 0 et 1 respectivement. Plus tard on rencontre la notion de composition de fonctions, avec les neutres fournis par les fonction Id_X . Cette notion de composition ne rentre pas vraiment dans le cadre des lois de composition interne (sauf si on se limite au cas des fonctions d'un ensemble fixé dans lui-même), mais on sent bien une parenté. On rencontre également les compositions d'inégalités : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$. Les éléments neutres sont fournis par la réflexivité $a \leq a$. Ici on peut trouver que l'analogie avec les lois de composition internes ou la composition de fonction est tirée par les cheveux. Pourtant, les trois démonstrations suivantes montreront que cette analogie est fructueuse.

Lemme 3.1.1

Soit X un ensemble ordonné. Si x_0 et x_1 sont des minimums² de X alors $x_0 = x_1$.

Démonstration : Supposons x_0 et x_1 minimums. Comme x_0 est minimum, $x_0 \leq x_1$. Comme x_1 est minimum, $x_1 \leq x_0$. Par antisymétrie de la relation d'ordre, on en déduit $x_0 = x_1$. $\square$

Voyons maintenant un analogue de cette démonstration avec des compositions de fonctions. On dit qu'un anneau A_0 est initial si, pour tout anneau A , il existe un unique morphisme d'anneau de A_0 dans A (ici on suppose que tous les anneaux sont unitaires, mais pas nécessairement commutatifs). C'est le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ et le lemme suivant montre que cette propriété caractérise $\mathbb{Z}$ en un sens très fort.

Lemme 3.1.2

Si deux anneaux A_0 et A_1 sont initiaux alors il existe un unique isomorphisme d'anneaux entre A_0 et A_1 .

Démonstration : Supposons que A_0 et A_1 sont initiaux. Comme A_0 est initial, on obtient un unique morphisme d'anneau $\varphi : A_0 \rightarrow A_1$. Montrons que φ convient. Comme A_1 est initial, on

²On rappelle qu'un élément x_0 d'un ensemble ordonné X est un minimum de X si $\forall x \in X, x_0 \leq x$.

obtient un unique morphisme d'anneau $\psi : A_1 \rightarrow A_0$. La composition $\psi \circ \varphi$ est un morphisme d'anneaux de A_0 dans A_0 . Comme A_0 est initial il y a exactement un tel morphisme. Or Id_{A_0} est également un morphisme d'anneau. On en déduit que $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{A_0}$. On montre de même, en utilisant que A_1 est initial, que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{A_1}$. Ainsi φ est un isomorphisme (d'inverse ψ), et on a déjà vu que φ est unique (même sans demander qu'il soit inversible). $\square$

Cette démonstration est un peu plus compliquée que la précédente car a priori il peut y avoir deux morphismes différents d'un anneau donné vers un autre, alors qu'il ne peut y avoir qu'une seule inégalité d'un élément d'un ensemble ordonné vers un autre. Mais le cœur de la démonstration est le même.

Voyons un troisième exemple. Fixons un groupe G et un sous-groupe distingué H dans G . Un quotient de G par H est un groupe G' muni d'un morphisme de groupes $\pi : G \rightarrow G'$ de noyau H qui vérifie la propriété suivante : pour tout groupe K et tout morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow K$, si $H \subseteq \ker \varphi$ alors il existe un unique morphisme $\bar{\varphi} : G' \rightarrow K$ tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ G' & & \end{array}$$

Vous avez construit en cours d'algèbre un quotient G/H pour chaque paire (G, H) , probablement comme ensemble de classes d'équivalence. Mais dans bien des cas il existe d'autres constructions possibles. Par exemple, dans le cas $G = \mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z}$, on peut considérer $G' = \mathbb{U}$, le groupe des nombres complexes de module 1, et $\pi : t \mapsto \exp(2i\pi t)$ qui est géométriquement bien plus parlant qu'un ensemble de parties infinies de $\mathbb{R}$. Malgré cela, il est très courant de dire « on considère le quotient de G par H ». Cela provient du lemme suivant.

Lemme 3.1.3

Soit (G_0, π_0) et (G_1, π_1) deux quotients d'un groupe G par un sous-groupe distingué H . Il existe un unique isomorphisme de groupes $\varphi : G_0 \rightarrow G_1$ tel que $\varphi \circ \pi_0 = \pi_1$.

Démonstration: Comme (G_1, π_1) est un quotient de G par H , on a en particulier $H \subseteq \ker \pi_1$. Comme (G_0, π_0) est un quotient de G par H , on en déduit l'existence d'un unique morphisme de groupes $\varphi : G_0 \rightarrow G_1$ tel que $\varphi \circ \pi_0 = \pi_1$ (avec les notations de la définition, $\varphi = \bar{\pi}_1$).

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_1} & G_1 \\ \pi_0 \downarrow & \nearrow \varphi & \\ G_0 & & \end{array}$$

Montrons que φ convient. Le même argument en échangeant les rôles de (G_0, π_0) et (G_1, π_1) fournit un unique morphisme de groupes $\psi : G_1 \rightarrow G_0$ tel que $\psi \circ \pi_1 = \pi_0$.

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\pi_0} & G_0 \\
\pi_1 \downarrow & \nearrow \psi & \\
G_1 & &
\end{array}$$

Dans le diagramme suivant, les deux petits triangles commutent donc le grand aussi.

$$\begin{array}{ccccc}
& G & & & \\
\pi_0 \swarrow & & \downarrow \pi_1 & \searrow \pi_0 & \\
G_0 & \xrightarrow{\varphi} & G_1 & \xrightarrow{\psi} & G_0
\end{array}$$

On peut voir cela géométriquement ou en calculant $(\psi \circ \varphi) \circ \pi_0 = \psi \circ (\varphi \circ \pi_0) = \psi \circ \pi_1 = \pi_0$. Comme $H \subseteq \ker \pi_0$ et (G_0, π_0) est quotient de G par H , il existe au plus un morphisme $\theta : G_0 \rightarrow G_0$ tel que $\theta \circ \pi_0 = \pi_0$ (ici on applique l'hypothèse sur (G_0, π_0) à π_0 et plus à π_1 comme dans le paragraphe précédent).

Nous avons vu que $\psi \circ \varphi$ convient mais Id_{G_0} convient également. Ainsi $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{G_0}$. On montre de même que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{G_1}$ donc φ est bien l'isomorphisme recherché (et on a déjà vu son unicité comme morphisme vérifiant $\varphi \circ \pi_0 = \pi_1$). $\square$

La complexité de la situation est encore montée d'un cran, mais l'air de famille avec la démonstration précédente est indéniable.

Il est probable que vous ayez rencontré la définition ci-dessus non pas comme étant une définition de « un quotient de G par H » mais sous le nom de « propriété universelle de G/H (et de la projection canonique $\pi : G \rightarrow G/H$) ». Dans ce cas on peut reformuler le lemme en « la propriété universelle de G/H caractérise $(G/H, \pi)$ modulo unique isomorphisme compatible avec π ». Le thème des propriétés universelles est un thème central en mathématiques fondamentales. Et la phrase « la propriété universelle caractérise ... modulo unique isomorphisme » est un refrain qui revient de plus en plus souvent lorsqu'on avance dans les études mathématiques. En plus des propriétés universelles de quotients de structures algébriques, nous avons croisé dans le chapitre précédent la propriété universelle des algèbres de polynômes. Mais qu'appelle-t-on une propriété universelle exactement ?

Les objectifs de ce chapitre sont de donner un cadre à l'analogie entre les différentes notions de composition rencontrées dans ce prologue, puis un énoncé unifiant les parties communes aux trois lemmes ci-dessus et une définition précise de la notion de propriété universelle, ainsi qu'une notion générale de produits de structures. Il s'agit du tout début de la théorie des catégories. Le chapitre Chapitre 5 poursuivra l'introduction à cette théorie.

Il y a deux choses cruciales à comprendre dès maintenant. Tout d'abord la diversité des exemples de ce prologue (qui n'est qu'un minuscule aperçu de la diversité à venir) montre que le cadre englobant ces exemples sera nécessairement un cran plus abstrait que les mathématiques de licence. Mais ce n'est rien d'insurmontable avec un peu d'habitude. Essayez de vous

souvenir de vos années de lycée. À l'époque, vous entendiez parler de vecteurs en cours de géométrie (et de physique). Vous entendiez également parler de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Plus tard vous avez appris la notion d'espace vectoriel réel qui englobe les vecteurs du lycée et les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les définitions et théorèmes de l'algèbre linéaire s'appliquent à ces deux exemples. Une telle généralisation est-elle un délire abstrait réservé aux algébristes les plus irrécupérables ? Faites l'effort de vous imaginer au lycée en train d'entendre quelqu'un discuter de l'analogie entre ces deux situations et l'existence d'une théorie abstraite (avec son nom ésotérique d'algèbre linéaire).

Une fois ce cap psychologique passé, il devient possible de profiter des nombreux rapprochements permis par ce nouveau cadre. Mieux, cette théorie et la notion de propriété universelle en particulier permettent un point de vue focalisé sur les propriétés attendues plutôt que sur les détails d'implémentation. Par exemple, la propriété universelle des groupes quotients est le cœur de la notion de groupe quotient, par opposition à la question de savoir si $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un ensemble d'ensembles de nombres réels ou l'ensemble des nombres complexes de module 1. Cette philosophie apparaissait déjà dans le Chapitre 1, ce qui n'est pas un hasard puisque nous verrons que les ensembles ordonnés sont des cas particuliers de catégories.

La deuxième chose à garder en tête est que les arguments généralisés sont en générale les parties répétitives des théories, celles qu'on peut dérouler sans rien utiliser de spécifique. Ainsi on voit que le lemme 3.1.2 n'utilise rien de la théorie des anneaux et que lemme 3.1.3 n'utilise pas vraiment non plus de théorie des groupes. C'est à la fois la force et la faiblesse de la théorie des catégories qui permet de rapprocher de nombreux concepts et d'unifier de nombreuses preuves mais qui ne suffira jamais à établir à elle seule un théorème difficile.

Comme dernier avertissement, signalons un problème sociologique. Chez certaines personnes, le vocabulaire abstrait de la théorie des catégories sert principalement à frimer ou à intimider. Un des objectifs de cours est de vous immuniser contre ce comportement en vous expliquant cette théorie.

3.2. Catégories

Définition 3.2.1

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- *une collection d'objets $\text{Ob}(\mathcal{C})$;*
- *pour chaque paire d'objets X et Y , une collection de morphismes $\text{Hom}(X, Y)$;*
- *pour chaque triplet d'objets X, Y et Z , une opération de composition*

$$\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

associative ;

- *pour chaque objet X , un morphisme identité $1_X \in \text{Hom}(X, X)$ qui est neutre pour la composition.*

Le mot « collection » est volontairement vague. On peut penser qu'il s'agit d'un ensemble mais techniquement ces collections sont parfois trop grandes pour être des ensembles (par exemple

il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles). Il s'agit d'un problème technique qui ne jouera aucun rôle dans ce cours.

De façon beaucoup plus intéressante, les mots « objets » et « morphismes » sont vagues parce qu'il y a beaucoup de possibilités.

Les premiers exemples sont les catégories dites concrètes, c'est à dire dont les objets sont des ensembles, éventuellement munis de structures supplémentaires, et dont les morphismes sont des fonctions, vérifiant éventuellement des conditions. On verra une définition plus satisfaisante dans le Chapitre 5.

Par exemple, Ens est la catégorie dont les objets sont tous les ensembles, dont les morphismes entre X et Y sont toutes les fonctions entre X et Y et dont la composition et les identités sont les compositions et identités usuelles.

Ensuite viennent tous les exemples correspondant aux structures algébriques. Par exemple Grp est la catégorie dont les objets sont les groupes et dont les morphismes sont les morphismes de groupes. De même la catégorie Ann des anneaux a pour objets les anneaux et pour morphismes les morphismes d'anneaux. C'est le cadre du lemme 3.1.2 concernant l'unicité modulo unique isomorphisme des anneaux initiaux. Il y a également des exemples analogues en provenance d'autres branches des mathématiques. Par exemple, la catégorie Top dont les objets sont les espaces topologiques et dont les morphismes sont les fonctions continues et la catégorie Ord dont les objets sont les ensembles ordonnés et les morphismes sont les fonctions croissantes.

Dans toutes ces catégories, il y a beaucoup d'objets (trop pour qu'ils forment un ensemble) et pour chaque paire d'objets il y a pas mal de morphismes pour chaque paire d'objets (mais ceux-ci forment tout de même un ensemble). Voyons maintenant des exemples n'ayant qu'un seul objet. Tout groupe G peut être vu comme une catégorie n'ayant qu'un objet, qu'on peut noter par exemple $*_G$ et pour laquelle $\text{Hom}(*_G, *_G) = G$ muni de sa loi de composition interne et de son élément neutre. Il ne faut pas confondre cet exemple avec cela de la catégorie Grp discuté précédemment. Ici nous avons fixé un groupe G . On remarquera que l'inversion dans G ne joue aucun rôle dans cette discussion, nous aurions pu nous contenter de supposer G muni d'une structure de monoïde (vous pouvez ignorer cette remarque si vous ne savez pas ce qu'est un monoïde).

L'extrême inverse est de considérer les catégories ayant le moins possible de morphismes. Tout ensemble X peut être vu comme une catégorie dont les objets sont les éléments de X et dont les seuls morphismes sont les identités.

Voyons maintenant comment les inégalités rentrent dans ce cadre. Tout ensemble ordonné X peut être vu comme une catégorie dont les objets sont les éléments de X et dont les morphismes sont les inégalités dans X . Ainsi, étant donné deux éléments x et y vus comme objets de X , il y a exactement un morphisme dans $\text{Hom}(x, y)$ si $x \leq y$ et aucun sinon. On peut noter un tel morphisme $m_{x,y}$ si on veut, mais en pratique on le notera simplement $x \leq y$. Il faut bien prendre le temps de comprendre comment la transitivité de la relation d'ordre se traduit en existence d'opération de composition ici. On notera que l'antisymétrie de la relation d'ordre ne joue aucun rôle dans cet histoire, on peut donc se contenter de supposer que X

est muni d'une relation de préordre (mais plus loin on utilisera la condition d'antisymétrie). Ces catégories provenant des ensembles ordonnés sont le cadre du lemme 3.1.1 concernant l'unicité du minimum.

À première vue, on pourrait penser que le cadre du lemme 3.1.3 concernant les groupes quotients est la catégorie des groupes. Mais la situation est plus subtile. Les groupes intervenant ne sont pas n'importe quels groupes mais les groupes munis d'un morphisme depuis un groupe G fixé dont le noyau contient un sous-groupe distingué H fixé. De plus les morphismes entre tels groupes qui interviennent dans l'argument sont uniquement ceux qui sont compatibles avec le morphisme depuis G . On peut donc définir une catégorie $\text{Grp}_{(G,H)}$ dont les objets sont les paires (G', π') où G' est un groupe et $\pi' : G \rightarrow G'$ est un morphisme dont le noyau contient H . Dans cette catégorie, les éléments de $\text{Hom}((G', \pi'), (G'', \pi''))$ sont les morphismes de groupe $\varphi : G' \rightarrow G''$ tels que $\pi'' \circ \varphi = \pi'$. On vérifie facilement que la composition de morphismes de groupes fournit une opération de composition pour cette catégories et que les fonctions identité fournissent des identités.

On peut encore voir cette catégorie comme une catégorie concrète en voyant des objets comme des ensembles munis d'une structure additionnelle formée d'une structure de groupe et d'un morphisme depuis G . Et les morphismes sont encore des fonctions vérifiant certaines conditions. Mais ce point de vue n'est pas très naturel. Il vaut vraiment mieux penser à cette exemple comme étant une catégorie de diagrammes. Ses objets sont vraiment des diagrammes et les morphismes sont également des diagrammes:

$$\mathcal{Ob}(\text{Grp}_{(G,H)}) = \left\{ \begin{array}{c} G \\ \pi' \downarrow \\ G' \end{array} \middle| H \subseteq \ker \pi' \right\}$$

$$\text{Hom}((G', \pi'), (G'', \pi'')) = \left\{ \begin{array}{ccc} & G & \\ \pi' \swarrow & & \searrow \pi'' \\ G' & \xrightarrow{\varphi} & G'' \end{array} \middle| \varphi \circ \pi' = \pi'' \right\}.$$

Comme dans le cas des relations d'ordre, il est commode d'avoir une façon formelle de renverser les morphismes afin d'éviter de dupliquer trop de démonstrations. Dans la définition suivante, la notation Hom est décorée d'un indice indiquant quelle est la catégorie ambiante afin de lever l'ambiguïté.

Définition 3.2.2

La catégorie opposée à une catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{C}^{\text{op}}$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et pour laquelle $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Dans le cas particulier des ensembles ordonnés, on retrouve bien la notion d'ordre opposé.

Bien souvent nous écrirons $f : X \rightarrow Y$ plutôt que $f \in \text{Hom}(X, Y)$, même lorsque les morphismes ne sont pas des fonctions.

La définition suivante est un premier exemple d'utilisation de la composition et des identités dans une catégorie. L'exercice suivant, qui montre que cette définition se comporte comme attendu, utilise également de façon cruciale l'associativité des compositions.

Définition 3.2.3

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. On dit que f est un isomorphisme s'il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$.

Exercice 3.1 : Montrer que, dans la définition d'un isomorphisme, le morphisme g est unique. On l'appelle l'inverse de f .

3.3. Objets initiaux et finaux

On peut maintenant donner la définition et le théorème qui généralisent les trois lemmes du prologue.

Définition 3.3.1

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

- On dit qu'un objet I de $\mathcal{C}$ est initial si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme de I vers X .
- On dit qu'un objet F de $\mathcal{C}$ est final si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme de X vers F .

On notera que F est final dans $\mathcal{C}$ si et seulement si il est initial dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$. On pourra donc démontrer tous les théorèmes abstraits concernant les objets finaux en se ramenant aux énoncés concernant les objets initiaux. Cependant il ne faut pas en déduire que l'on peut confondre ces deux notions. Comme les exemples le montreront, pour une catégorie donnée, les objets initiaux et finaux peuvent être très différents.

Dans la liste suivante, on notera la grande diversité de situation entre les catégories ayant ou pas des objets initiaux ou finaux ou des objets qui sont à la fois initiaux ou finaux.

Exemple 3.3.2 : L'ensemble vide est initial dans Ens . Tout singleton est final dans Ens .

Tout groupe trivial est à la fois initial et final dans Grp .

Dans la catégorie des anneaux on retrouve la notion d'anneau initial du prologue de ce chapitre. En particulier $\mathbb{Z}$ est initial. Tout anneau trivial (c'est-à-dire ayant exactement un élément) est final.

Dans la catégorie des corps il n'y a ni objet initial ni objet final. En effet il ne peut y avoir un morphisme entre deux corps que s'ils ont la même caractéristique. Si on fixe la caractéristique alors il y a un objet initial qui est soit $\mathbb{Q}$ soit $\mathbb{Z}/p$ selon qu'on a fixé une caractéristique nulle ou égale à un nombre premier p .

Dans un groupe vu comme catégorie, il n'y a ni objet initial ni objet final, sauf si le groupe est trivial.

Dans un ensemble ordonné, un élément est initial si et seulement si c'est un minimum. Il est final si et seulement si il est maximum.

Dans la catégorie $\text{Grp}_{(G,H)}$ un objet initial est exactement un quotient de G par H au sens du lemme 3.1.3. En particulier G/H muni de sa projection canonique est initial.

Exercice 3.2 : Soit X un ensemble et $\sim$ un relation d'équivalence sur X . On note $\mathcal{C}_{(X,\sim)}$ la catégorie dont les objets sont les paires (Y, f) où Y est un ensemble et $f : X \rightarrow Y$ est une fonction compatible avec $\sim$ (ce qui signifie $\forall(x, x'), x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$) et pour laquelle les morphismes de (Y, f) dans (Z, g) sont les fonctions $\varphi : Y \rightarrow Z$ telles que $\varphi \circ f = g$.

1. Montrer soigneusement qu'il s'agit bien d'une catégorie en détaillant pourquoi l'opération de composition est bien définie.
2. Tout objet initial de $\mathcal{C}_{(X,\sim)}$ est appelé quotient de X par $\sim$. Montrer qu'un objet (Y, π) est initial si et seulement si π est surjective et, pour tous x_1 et x_2 dans X , $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ seulement si $x_1 \sim x_2$.
3. On note $X/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$, et $\pi : X \rightarrow X/\sim$ l'application qui envoie tout élément sur sa classe d'équivalence. Montrer que $(X/\sim, \pi)$ est un quotient de X par $\sim$.
4. Montrer que $((X/\sim) \times (X/\sim), \pi \times \pi)$ est un quotient de $X \times X$ par la relation produit $\sim \times \sim$.
5. A-t-on $(X/\sim) \times (X/\sim) = (X \times X)/(\sim \times \sim)$?
6. La question précédente n'est pas pertinente. Formuler le bon énoncé et y répondre.

Exercice 3.3 : Soit I un ensemble et K un corps. On considère la catégorie dont les objets sont les paires (E, e) où E est un K -ev et e une applications de I dans E , et $\text{Hom}((E, e), (F, f)) = \{\varphi \in L(E, F) \mid \varphi \circ e = f\}$. Montrer que (E, e) est initial si et seulement si e est une base de E .

On peut maintenant réunir la partie commune aux trois lemmes du prologue.

Théorème 3.3.3

Si I et I' sont des objets initiaux dans une catégorie $\mathcal{C}$ alors il existe un unique isomorphisme de I vers I' . L'énoncé analogue pour les objets finaux est vrai aussi.

Démonstration : Supposons que I et I' sont initiaux. Comme I est initial, on obtient un unique $\varphi : I \rightarrow I'$. Comme I' est initial, on obtient un unique $\psi : I' \rightarrow I$. Comme I est initial et que 1_I et $\psi \circ \varphi$ sont deux morphismes de I vers I , on obtient $\psi \circ \varphi = 1_I$. Comme I' est initial et que $1_{I'}$ et $\varphi \circ \psi$ sont deux morphismes de I' vers I' , on obtient $\varphi \circ \psi = 1_{I'}$. Ainsi φ est bien un isomorphisme, et on a vu qu'il est l'unique morphisme de I vers I' .

L'énoncé analogue pour les objets finaux s'obtient en passant à la catégorie $\mathcal{C}^{\text{op}}$. □

Au vu de la démonstration précédente, on peut se demander ce que sont devenus les différences de complexité entre les trois lemmes du prologue. Le cas des ensembles ordonnés est

clairement particulier car la condition d'antisymétrie qui intervient dans la définition d'une relation d'ordre assure que deux objets isomorphes dans un ensemble ordonnés sont en fait égaux. De plus le fait qu'il y ait au plus une inégalité entre deux objets fait essentiellement disparaître la condition d'unicité dans la définition d'objet initial.

On peut modifier un peu la situation en considérant le cas des relations de préordre, c'est à dire les relations réflexives et transitives mais pas nécessairement anti-symétrique. C'est le cas de la relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$ par exemple (ou plus généralement dans un anneau commutatif intègre). Dans ce cas on obtient toujours une catégorie mais, dans le cas de $\mathbb{Z}$, tout élément est isomorphe à son opposé (et dans le cas général tout élément x est isomorphe à tous les ux pour u inversible). On retrouve la difficulté familière de non-unicité du pgcd défini comme élément minimum de l'ensemble des diviseurs d'une famille d'éléments.

Il est encore plus intéressant de s'interroger sur la différence de complexité entre les démonstrations du lemme 3.1.2 et lemme 3.1.3. Une partie de la complexité du lemme 3.1.3 a été déplacée dans la discussion de la définition de la catégorie $\text{Grp}_{(G,H)}$. Mais surtout une bonne partie de la complexité apparente a disparu sous l'abstraction de notre nouveau cadre qui permet de se concentrer sur l'essentiel sans se laisser distraire par des notations lourdes et un contexte sophistiqué.

Comme promis, nous avons déjà gagné une définition de l'expression « propriété universelle ». On appelle propriété universelle la propriété d'être un objet initial dans une catégorie. De façon équivalente, il s'agit de la propriété d'être un objet final dans une catégorie. On peut ainsi reformuler le théorème en « toute propriété universelle spécifie l'objet concerné modulo unique isomorphisme ».

Voyons deux autres exemples algébriques (il y aura bien sûr des exemples topologiques dans le chapitre suivant).

Exemple 3.3.4 : Soit G un groupe. On note Ab_G la catégorie dont les objets sont des groupes abéliens munis d'un morphisme depuis G . Les morphismes dans cette catégories sont définis comme dans la définition de $\text{Grp}_{(G,H)}$. La propriété universelle de l'abélianisé G_{ab} de G est d'être initial dans la catégorie Ab_G . Plus précisément, la paire constituée de G_{ab} et de la projection canonique π de G sur G_{ab} a cette propriété universelle : pour tout groupe abélien A et tout morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow A$, il existe un unique morphisme $\bar{\varphi} : G_{\text{ab}} \rightarrow A$ tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ G_{\text{ab}} & & \end{array}$$

Exercice 3.4 : Soit K un corps. On note $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les paires (A, a) où A est une K -algèbre et a un élément de A , et les morphismes entre (A, a) et (B, b) sont les morphismes de K -algèbre de A dans B qui envoient a sur b .

1. Montrer que $(K[X], X)$ est un objet initial dans $\mathcal{C}$. Pour tout objet (A, a) on appelle évaluation en a et on note ev_a l'unique morphisme depuis $(K[X], X)$. Dans la suite on utilisera uniquement l'existence et l'unicité de ev_a , pas sa construction. On dit que a est une racine de $P \in K[X]$ dans A si $ev_a(P) = 0$.

On fixe un polynôme P dans $K[X]$. On note A_P la K -algèbre $K[X]/(P)$ et π la projection de $K[X]$ sur A_P .

1. Montrer que π et $ev_{\pi(X)}$ sont des morphismes de K -algèbres qui envoient X sur $\pi(X)$.
2. Montrer que $\pi(X)$ est une racine de P dans A_P .
3. On note $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ formée des objets (A, a) pour lesquels a est une racine de P . Montrer que $(A_P, \pi(X))$ est un objet initial de $\mathcal{C}'$.
4. Dans le cas $K = \mathbb{R}$ et $P = X^2 + 1$, en déduire qu'il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres entre $\mathbb{C}$ et A_P qui envoie i sur $\pi(X)$ (en supposant qu'on a construit $\mathbb{C}$ de façon élémentaire, comme ensemble de paires de nombres réels muni d'opérations étranges).

3.4. Produits et coproduits

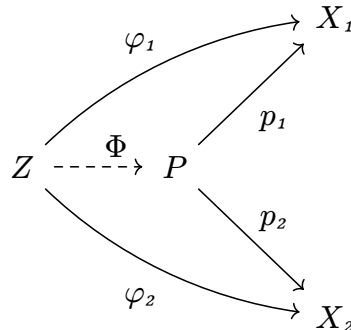
Dans cette section on se concentre sur deux cas particuliers de propriété universelle qui joueront un rôle crucial dans la suite (particulièrement la première).

Définition 3.4.1

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et X une famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par un ensemble I .

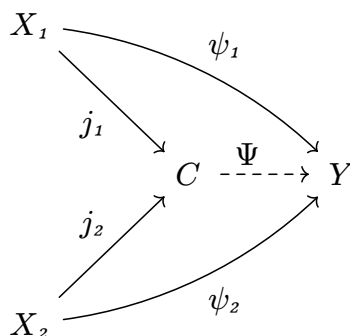
- Un produit des X_i est un objet P de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $p_i : P \rightarrow X_i$ pour tout i dans I , appelés projections et vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout objet Z et toute famille de morphismes $\varphi_i : Z \rightarrow X_i$, il existe un unique morphisme $\Phi : Z \rightarrow P$ tel que, pour tout i , $\varphi_i = p_i \circ \Phi$.

Par exemple, si $I = \{1, 2\}$ on obtient le diagramme suivant :



- Un coproduit des X_i est un objet C de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $j_i : X_i \rightarrow C$ pour tout i dans I , appelés inclusions et vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout objet Y et toute famille de morphismes $\psi_i : X_i \rightarrow Y$, il existe un unique morphisme $\Psi : C \rightarrow Y$ tel que, pour tout i , $\psi_i = \Psi \circ j_i$.

Par exemple, si $I = \{1, 2\}$ on obtient le diagramme suivant :



On notera que P est un produit des X_i dans $\mathcal{C}$ si et seulement si c'est un coproduit dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

Comme le vocabulaire de propriété universelle l'indique, les produits et coproduits sont des cas particuliers d'objets finaux et initiaux. Par exemple, un produit des X_i est un objet final dans la catégorie dont les objets sont les paires (Z, φ) où Z est un objet de $\mathcal{C}$ et φ est une collection de morphismes $\varphi_i : Z \rightarrow X_i$. Les morphismes entre (Z, φ) et (Z', φ') sont les morphismes θ entre Z et Z' dans $\mathcal{C}$ qui vérifient $\forall i, \varphi'_i \circ \theta = \varphi_i$.

On peut donc appliquer le théorème 3.3.3 pour voir que les produits (resp. coproduits) sont unique modulo unique isomorphisme compatible aux projections (resp. inclusions).

Exemple 3.4.2 : Dans Ens , le produit cartésien de X_i muni de ses projections sur les facteurs est bien un produit. En effet, pour tout Z et toute famille d'applications $\varphi_i : Z \rightarrow X_i$, l'unique Φ qui convient est $z \mapsto (i \mapsto \varphi_i(z))$. De plus la réunion (disjointe) des X_i muni des inclusions est un coproduit. En effet, pour tout Y et ψ comme dans la définition on peut associer $\Psi : \bigsqcup X_i \rightarrow Y$ qui envoie chaque x_i sur $\psi_i(x_i)$. Dans cet exemple on voit déjà que les produits et coproduits peuvent être très différents.

Dans les catégories des groupe et des anneaux, les produits sont simplement les produits cartésiens équipés des structures de groupe ou anneau qu'on imagine. Les coproduits sont nettement plus compliqués à construire. Il y a peu d'espoir de mettre une structure de groupe sur une réunion disjointe de groupes par exemple. Cependant ces deux catégories admettent bien des coproduits pour toute famille d'objets. Dans le cas des groupes il s'agit des produits libres de groupes. Dans le cas des anneaux commutatifs il s'agit des produits tensoriels.

La catégorie des corps n'admet ni produits ni coproduits.

La catégorie des modules sur un anneau commutatif fixé fournit un exemple intéressant de différence subtile entre produits et coproduits qui sera discuté dans l'exercice 3.6 (la subtilité est déjà présente pour les espaces vectoriels).

Exercice 3.5 : Soit X un ensemble ordonné et $x : I \rightarrow X$ une famille d'éléments de X . Montrer qu'un produit des x_i est exactement un inf des x_i . Montrer de même qu'un coproduit est un sup.

Remarque 3.4.3 : On peut reformuler la définition de produit en terme de bijections d'ensembles de morphismes. Étant donnée une famille X d'objets d'une catégorie, un objet P muni de projections $p_i : P \rightarrow X_i$ est un produit si, pour chaque objet Z , l'application

$$\Theta_Z : f \mapsto (i \mapsto p_i \circ f)$$

est une bijection de $\text{Hom}(Z, P)$ vers $\prod_i \text{Hom}(Z, X_i)$, où ce dernier produit est un produit d'ensembles. On aimerait dire que l'existence d'une telle famille de bijections Θ_Z caractérise les produits, sans spécifier ces bijections ni les p_i . Mais cela ne peut fonctionner que si les Θ_Z varient naturellement avec Z . Pour l'instant nous n'avons pas les moyens de préciser cette idée, cela viendra dans un chapitre ultérieur.

Exercice 3.6 : On fixe un corps K . Et une famille $(E_i)_{i \in I}$ de K -espaces vectoriels.

1. Montrer que l'ensemble produit des E_i muni de la structure de K -espace vectoriel usuelle et des projections sur les E_i est un produit des E_i dans la catégorie des K -espaces vectoriels.
2. On considère le sous-espace $\bigoplus_i E_i$ de $\prod_i E_i$ formé des vecteurs n'ayant qu'un nombre fini de projections sur les E_i non nulles (en particulier ce n'est différent du produit que lorsque I est infini). On muni ce sous-espace des inclusions $j_k : E_k \rightarrow \prod_i E_i$ définies par

$$v \mapsto (i \mapsto \begin{cases} v & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases})$$

Montrer qu'il s'agit d'un coproduit des E_i dans la catégorie $K\text{-ev}$.

Chapitre 4.

Espaces topologiques

4.1. Prologue

Le but de ce prologue est de réfléchir à ce qui nécessite l'introduction de la topologie générale en plus de la théorie des espaces métriques qui semble bien plus simple.

La première motivation est psychologique. Il s'agit de se concentrer sur les données nécessaires pour parler de continuité. Étant donné un espace métrique X et sa distance d , il est impossible de reconstituer d à partir de la connaissance des fonctions continues partant de X ou arrivant dans X . La distance contient beaucoup trop d'information qui n'intervient absolument pas dans la notion de continuité. Au contraire deux topologies T et T' sur un ensemble X sont égales si et seulement si elles donnent lieu aux mêmes fonctions continues. Mieux, elles sont égales dès que la fonction Id_X est continue de (X, T) dans (X, T') et de (X, T') dans (X, T) . Pour obtenir un tel résultat avec les espaces métriques il faudrait drastiquement réduire les morphismes utilisés pour les lier de façon bien plus forte à la distance. Ainsi on peut se limiter aux fonctions 1-lipschitziennes et retrouver la distance à partir des morphismes.

Cette première motivation ne suffit pas à investir dans des espaces dont la topologie n'est pas métrisable, c'est-à-dire ne provient pas d'une distance. Pour cela on peut regarder en particulier du côté des espaces de fonctions, disons de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La notion la plus immédiate de convergence de suites de fonctions est celle de la convergence simple. Mais on peut montrer qu'il n'existe pas de distance sur l'ensemble $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui mène à cette notion de suite convergente. La convergence simple voit deux fonctions comme étant proches si elles prennent des valeurs proches en tout point, sans aucune contrainte liant les différents points de la source. Du point de vue de la convergence simple, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est vraiment un produit de copies de $\mathbb{R}$ indexé par $\mathbb{R}$. Au fond, le problème est que la catégorie des espaces métriques (avec comme morphismes les fonctions continues) n'admet pas de produits pour des familles non dénombrables d'objets. Un premier objectif de ce chapitre sera donc de construire les produits quelconques d'espaces topologiques et de comprendre leurs suites convergentes. Surtout cette construction sera très systématique et basée sur les propriétés attendues plutôt que sur les détails d'implémentation qui seront complètement cachés par la technologie du Chapitre 1.

La motivation suivante provient de la notion de quotient. Nous avons vu dans l'exercice 3.2 que la propriété universelle des quotients caractérise entièrement ces objets. La question analogue en topologie est la suivante : étant donné un espace X (métrique ou topologique)

et une relation d'équivalence $\sim$ sur X , on voudrait un objet initial dans la catégorie dont les objets sont les paires (Y, f) où Y est un espace (métrique ou topologique) et $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue compatible avec $\sim$, c'est-à-dire que $\forall x \forall x', x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$. Mieux, on espère que l'ensemble sous-jacent à cet espace initial soit un quotient de X par $\sim$. Cela ne fonctionne pas en général dans la catégorie des espaces métriques, il faut mettre des contraintes très fortes sur la relation d'équivalence. Nous verrons que cela fonctionne toujours dans la catégorie des espaces topologiques. En fait il est même possible de faire une construction plus générale : étant donnée n'importe quelle fonction $f : X \rightarrow Y$ entre deux ensembles, il est possible de pousser n'importe quelle topologie sur X pour obtenir une topologie sur Y caractérisée par une propriété universelle faisant intervenir f . De même on peut tirer n'importe quelle topologie sur Y pour obtenir une topologie sur X .

Toutes ces constructions utiliseront de façon systématique la technologie du Chapitre 1. Le point clef est que l'ensemble des topologies sur un ensemble fixé est naturellement un treillis complet. Le Chapitre 2 sera utilisé pour comprendre la notion de convergence en topologie générale et donner un point de vue beaucoup plus intuitif sur les notions de parties ouvertes ou fermées, sur l'adhérence et sur l'intérieur.

La dernière motivation provient de la notion de compacité. Le critère de compacité de Riesz assure que les fermés bornés d'un espace vectoriel normé sont compacts seulement si l'espace est de dimension finie. C'est dommage car la compacité est très utile, par exemple pour assurer qu'une fonction continue à valeur réelle est bornée et atteint ses bornes. Dans ce chapitre nous étudierons en détail la notion de compacité, en utilisant intensivement le Chapitre 2 et nous verrons comment munir des espaces vectoriels de dimension infinie de topologie pour lesquelles on peut récupérer de la compacité. Au passage nous ferons un peu d'algèbre topologisée, en essayant notamment de généraliser quelques résultats classiques sur les applications linéaires continues entre espaces normés.

Dans tout ce chapitre nous avons également comme objectif de poursuivre l'algébrisation au service de l'intuition. La théorie des filtres sera utilisée systématiquement pour pouvoir raisonner sur les « ensembles des points très proches » d'un point donné. De plus un maximum de constructions seront basées sur l'utilisation de propriétés universelles pour montrer qu'on peut se concentrer sur les propriétés des objets construits plutôt que sur les détails de constructions, comme nous l'avons déjà annoncé pour la topologie produit.

4.2. Treillis des topologies

On rappelle la définition de topologie.

Définition 4.2.1

Une topologie sur un ensemble X est une famille T de parties de X qui est stable par intersection finie et réunion quelconque.

Dans la suite, on notera $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble des topologies sur un ensemble X . On munit $\mathcal{T}(X)$ de la relation d'ordre opposée à la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

En particulier, pour tout $T \in \mathcal{T}(X)$, X lui même est ouvert puisque c'est l'intersection du sous-ensemble vide de T et $\emptyset$ est ouvert puisque c'est la réunion du sous-ensemble vide de T . En pratique il est parfois commode de remplacer la condition d'intersection finie par la conjonction équivalente des conditions d'intersection vide (ie. $X \in T$) et d'intersection binaire (pour tous U et V dans T , $U \cap V \in T$).

L'inégalité $T \leq T'$ entre deux topologie se lit « T est plus fine que T' ». Cette relation d'ordre peut sembler moins naturelle que la relation d'inclusion mais nous verrons plus loin qu'elle interagit mieux avec la relation d'ordre sur les filtres (qui n'est pas négociable car c'est celle qui rend croissante l'inclusion P des parties dans les filtres).

Faisons une remarque de vocabulaire et de notations. Un espace topologique est un ensemble muni d'une topologie. La plupart du temps, on emploie la synecdoque « Soit X un espace topologique » plutôt que d'écrire « Soit (X, T) un espace topologique ». Dans ce chapitre il sera souvent question d'ensembles sur lesquels on a pas encore fixé une topologie, ou bien d'ensembles sur lesquels on veut comparer plusieurs topologies. On utilisera donc parfois la forme (X, T) qui peut paraître un peu pédante, ou bien on écrira « Soit X un espace topologique » puis on utilisera sans commentaire la notation T_X pour désigner la topologie de X . On écrira aussi $f : X \rightarrow Y$ est (T, T') -continue pour dire qu'elle est continue de X muni de la topologie T dans Y muni de la topologie T' en cas de risque de confusion.

Théorème 4.2.2

Pour toute ensemble X , $\mathcal{T}(X)$ est un treillis complet dont les sup proviennent de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$. En particulier l'inclusion de $\mathcal{T}(X)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ admet un adjoint à droite qu'on notera $\langle \cdot \rangle$.

Démonstration: D'après corollaire 1.4.12, il suffit de montrer que, pour tout ensemble $S \subseteq \mathcal{T}(X)$ le sup de S dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$, c'est-à-dire l'intersection T_S des éléments de S , est une topologie. Les deux vérifications sont immédiates. Montrons par exemple que T_S est stable par réunion. Soit $U \subseteq T_S$. Montrons que $\bigcup_{A \in U} A \in T_S$. Par définition de T_S , il s'agit de montrer que $\bigcup_{A \in U} A$ est dans chaque élément de S . Soit $T \in S$. Comme $T_S \subseteq T$, on obtient $U \subseteq T$. Or T est une topologie donc est stable par réunion donc $\bigcup_{A \in U} A \in T$. $\square$

Soit $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, on dit que $\langle S \rangle \in \mathcal{T}(X)$ est la topologie engendrée par S . On dit aussi que S est une pré-base de T lorsque $T = \langle S \rangle$ (mais nous n'emploierons pas ce vocabulaire qui n'est vraiment utile que dans des approches faisant jouer un rôle majeur à $\langle \cdot \rangle$).

Exemple 4.2.3 : Soit (X, d) un espace métrique. La topologie associée à d est la topologie engendrée par les boules de rayon strictement positif.

Remarque 4.2.4 : On peut décrire explicitement les ouverts de la topologie engendrée par une famille S de parties. On peut montrer que

$$\langle S \rangle = \left\{ U \subseteq X \mid \exists I \text{ ensemble, } \exists V : I \rightarrow \mathcal{P}(S), (\forall i \in I, V_i \text{ fini}) \text{ et } U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{W \in V_i} W \right\}$$

mais nous n'utiliserons jamais cette description car cela serait vraiment le contraire des méthodes développées dans ce cours.

Lemme 4.2.5

Dans $\mathcal{T}(X)$, $\perp = \mathcal{P}(X)$ appelée topologie discrète et $\top = \{\emptyset, X\}$ appelée topologie grossière.

Démonstration: La première affirmation est claire car $\mathcal{P}(X)$ est minimal dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ et il s'agit d'une topologie donc c'est aussi le minimum de $\mathcal{T}(X)$. Pour l'élément maximal il suffit de remarquer que toute topologie sur X doit contenir $\emptyset$ et X et que $\{\emptyset, X\}$ est bien une topologie. $\square$

4.3. Images directes et réciproques de topologies

Lemme 4.3.1

Soit X et Y des ensembles. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Pour toute topologie T sur X ,

$$f_*T := \{V \mid f^*V \in T\}$$

est une topologie sur Y . On peut aussi l'écrire $(f^*)^*T$: l'image réciproque de T par l'application $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Démonstration: Les vérifications sont immédiates car $f^* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ commute aux intersections et aux réunions. $\square$

Observation 4.3.2

Soit (X, T_X) et (Y, T_Y) des espaces topologiques. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $f_*T_X \leq T_Y$. Il n'y a rien à démontrer, on retombe sur la définition usuelle de la continuité simplement en dépliant les définitions de f_*T_X et de $\leq$.

Au vu de l'observation ci-dessus, on pourrait vouloir simplement définir f_*T comme $\inf\{T' \mid f \text{ est } (T, T')\text{-continue}\}$. L'avantage serait de n'utiliser que la structure de treillis complet. Mais il ne serait pas clair que l'inf est atteint.

Un cas particulier de l'observation est que, pour tout topologie T sur X , $f : X \rightarrow Y$ est (T, f_*T) -continue. On retrouve aussi le fait qu'une fonction à valeurs dans un espace topologique grossier est toujours continue puisque $f_*T \leq \top$ est toujours vrai.

Pour conclure la discussion sur le lien entre image directe et continuité, on note deux conséquences immédiates de l'observation 4.3.2. Tout d'abord il est facile de comprendre quelles sont les fonctions continues à valeur dans un ensemble muni de la topologie engendrée par un ensemble de parties.

Lemme 4.3.3

Soit S un ensemble de parties d'un ensemble Y et soit (X, T) un espace topologique. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est $(T, \langle S \rangle)$ -continue si et seulement si $\forall V \in S, f^*V \in T$.

Démonstration: Il s'agit d'une conséquence directe de l'observation 4.3.2 et de l'adjonction entre l'inclusion $\mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ et $\langle \cdot \rangle$:

$$f \text{ continue} \Leftrightarrow f_*T \leq \langle S \rangle \Leftrightarrow S \subseteq (f^*)^*T \Leftrightarrow (f^*)_S \subseteq T. \quad \square$$

On notera que le lemme précédent n'est pas symétrique, la topologie engendrée est présente au but de f , pas à la source.

L'observation suivante est une conséquence encore plus directe de l'observation 4.3.2 et de la définition de borne inférieure.

Observation 4.3.4

Soit X et Y des ensembles. Soit $S \subseteq \mathcal{T}(Y)$. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est $(T_X, \inf S)$ -continue si et seulement si, pour tout T dans S , $f : X \rightarrow Y$ est (T_X, T) -continue. En effet $f_*T_X \leq \inf S \Leftrightarrow \forall T \in S, f_*T_X \leq T$.

L'opération d'image directe d'une topologie est compatible avec la composition et les identités.

Lemme 4.3.5

Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. Pour toute topologie T sur X , $(g \circ f)_*T = g_*f_*T$. De plus $\text{Id}_*T = T$.

Démonstration: Cela découle directement des propriétés de l'image réciproque d'ensembles :

$$(g \circ f)_* = ((g \circ f)^*)^* = (f^* \circ g^*)^* = (g^*)^* \circ (f^*)^* = g_* \circ f_*$$

et

$$(\text{Id}_X)_* = (\text{Id}_X^*)^* = (\text{Id}_{\mathcal{P}(X)})^* = \text{Id}_{\mathcal{T}(X)}. \quad \square$$

On en déduit immédiatement la propriété universelle de la topologie image directe.

Proposition 4.3.6

Soit X, Y et Z des ensembles, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des fonctions. Pour toutes topologies T_X sur X et T_Z sur Z , la topologie f_*T_X vérifie

$$g \text{ est } (f_*T_X, T_Z)\text{-continue} \Leftrightarrow g \circ f \text{ est } (T_X, T_Z)\text{-continue}.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ Y & & \end{array}$$

Démonstration: Fixons T_X et T_Z . On a

$$\begin{aligned} g \text{ est } (f_*T_X, T_Z)\text{-continue} &\Leftrightarrow g_*(f_*T_X) \leq T_Z \\ &\Leftrightarrow (g \circ f)_*T_X \leq T_Z \\ &\Leftrightarrow g \circ f \text{ est } (T_X, T_Z)\text{-continue} \end{aligned}$$

En utilisant l'observation 4.3.2 et le lemme 4.3.5. □

Remarque 4.3.7 : Ici on peut légitimement protester que le résultat précédent est appelé propriété universelle sans qu'il soit complètement clair qu'il rentre dans le cadre du chapitre précédent. Mais on montre facilement qu'il est équivalent à la formule

$$f_*T_X = \inf\{T \in \mathcal{T}(Y) \mid f \text{ est } (T_X, T)\text{-continue et} \\ \forall (Z, T_Z), g \circ f \text{ est } (T_X, T_Z)\text{-continue} \Rightarrow g \text{ est } (T, T_Z)\text{-continue}\}$$

qui caractérise f_*T_X comme un inf, donc comme un objet initial. En particulier cette propriété caractérise f_*T_X .

En particulier on a atteint l'objectif d'avoir une topologie à mettre sur n'importe quel quotient : on prend simplement l'image directe de la topologie de départ par la projection. En combinant la propriété universelle des quotients d'ensemble (exercice 3.2) et le résultat précédent, on obtient :

Corollaire 4.3.8

*Soit X un espace topologie et $\pi : X \rightarrow Y$ un quotient de X par une relation d'équivalence $\sim$. On munit Y de la topologie π_*T_X . La projection π est continue et vérifie la propriété universelle suivante. Soit Z un espace topologique et $f : X \rightarrow Z$ une fonction continue. Si f est compatible avec la relation d'équivalence $\sim$ alors il existe une unique fonction $\bar{f} : Y \rightarrow Z$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ et cette fonction $\bar{f}$ est automatiquement continue.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ Y & & \end{array}$$

*Cette propriété caractérise (Y, f_*T_X, π) modulo unique homéomorphisme compatible avec la projection depuis X : si $(Y', T_{Y'})$ est un autre espace topologique muni d'une application continue $\pi' : X \rightarrow Y'$ vérifiant cette propriété alors il existe un unique homéomorphisme $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tel que $\pi' \circ \varphi = \pi$.*

Démonstration: Il ne reste qu'à vérifier que cette propriété est caractéristique. D'après le théorème 3.3.3, il suffit de montrer que c'est effectivement une propriété universelle, c'est à dire la définition d'un objet initial (ou final) dans une catégorie bien choisie. Ici les objets sont les paires (Y, π) où Y est un espace topologique et π est une fonction continue de X dans Y

qui est compatible avec $\sim$. Et un morphisme de (Y, π) dans (Y', π') est une fonction continue $\varphi : Y \rightarrow Y'$ telle que $\pi' \circ \varphi = \pi$. $\square$

Lemme 4.3.9

Pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$, $f_* : \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(Y)$ commute aux sup. Ainsi elle admet un adjoint à droite noté $f^* : \mathcal{T}(Y) \rightarrow \mathcal{T}(X)$ et appelé image réciproque de topologie.

Démonstration: Il s'agit d'une conséquence immédiate des définitions et du fait que l'image réciproque des parties commute aux intersections. Soit $S \subseteq \mathcal{T}(X)$. On a

$$f_*(\sup S) = (f^*)^* \bigcap_{T \in S} T = \bigcap_{T \in S} (f^*)^* T = \sup_{T \in S} f_* T. \quad \square$$

Dans le lemme précédent, l'existence de f^* est déduite du théorème de l'application adjointe. Bien sûr, on peut expliciter cette opération: on peut montrer que $f^* T = (f^*)_* T = \{U \subseteq X \mid \exists V \in T, U = f^* V\}$ (simplement en vérifiant que $(f^*)_* T$ est effectivement une topologie et en utilisant l'adjonction $(f^*)_* \dashv (f^*)^*$). Mais cette formule concrète ne nous sera presque jamais utile, la seule exception étant le cas où f est l'inclusion d'une partie que nous détaillerons dans la remarque 4.3.14.

L'opération d'image directe d'une topologie est compatible avec la composition et les identités.

Lemme 4.3.10

Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. Pour toute topologie T sur Z , $(g \circ f)^* T = f^* g^* T$. De plus $\text{Id}^* T = T$.

Démonstration: L'application $(g \circ f)^*$ est adjointe à droite de $(g \circ f)_*$ par construction. Or le lemme 4.3.5 assure que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ donc le lemme 1.3.7 assure que $f^* \circ g^*$ est également adjoint à droite de $(g \circ f)_*$ donc on conclut par unicité de l'adjoint à droite.

Montrons maintenant que $\text{Id}^* T = T$. Cela découle de l'unité et de la co-unité de $\text{Id}_* \dashv \text{Id}^*$ et de $\text{Id}_* T = T$. En effet on $T \leq \text{Id}^*(\text{Id}_* T) = \text{Id}^* T$ et $\text{Id}^* T = \text{Id}_*(\text{Id}^* T) \leq T$. $\square$

Par adjonction entre image directe et image réciproque, l'observation 4.3.2 devient :

Observation 4.3.11

Soit (X, T_X) et (Y, T_Y) des espaces topologiques. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $T_X \leq f^* T_Y$.

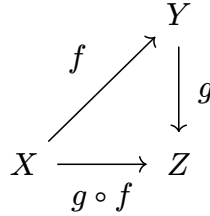
Un cas particulier de l'observation est que, pour tout topologie T sur Y , $f : X \rightarrow Y$ est $(f^* T, T)$ -continue. On retrouve aussi le fait qu'une fonction partant d'un espace topologique discret est toujours continue puisque $\perp \leq f^* T$ est toujours vrai. On notera aussi qu'une fois l'adjonction $f_* \dashv f^*$ disponible, on récupère $f_* \perp = \perp$ et $f^* \top = \top$ automatiquement par le théorème 1.4.10. Ainsi les deux caractérisations de la continuité (observation 4.3.2 et observation 4.3.11) permettent chacune de retrouver la continuité des fonctions depuis un espace discret ou vers un espace grossier.

On déduit immédiatement du lemme 4.3.10 et de l'observation 4.3.11 la propriété universelle de la topologie image réciproque.

Proposition 4.3.12

Soit X, Y et Z des ensembles, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des fonctions. Pour toutes topologies T_X sur X et T_Z sur Z , la topologie g^*T_Z vérifie

$$f \text{ est } (T_X, g^*T_Z)\text{-continue} \Leftrightarrow g \circ f \text{ est } (T_X, T_Z)\text{-continue}.$$



Démonstration: Fixons T_X et T_Z . On a

$$\begin{aligned} f \text{ est } (T_X, g^*T_Z)\text{-continue} &\Leftrightarrow T_X \leq f^*(g^*T_Z) \\ &\Leftrightarrow T_X \leq (g \circ f)^*T_Z \\ &\Leftrightarrow g \circ f \text{ est } (T_X, T_Z)\text{-continue} \end{aligned}$$

En utilisant l'observation 4.3.11 et le lemme 4.3.10. □

Remarque 4.3.13 : Comme dans la remarque 4.3.7, on peut voir que la propriété universelle de g^*T_Z caractérise bien g^*T_Z .

Remarque 4.3.14 : Le cas particulier le plus simple de topologie image réciproque est celui de la topologie induite. Si A est une partie d'un espace topologique X , on peut la munir de ι^*T_X où $\iota : A \rightarrow X$ est l'application d'inclusion, c'est-à-dire la restriction de Id_X à A . Dans ce cas la propriété universelle devient simplement : une fonction $f : Z \rightarrow A$ est continue pour la topologie induite si et seulement si $\iota \circ f : Z \rightarrow X$ est continue.

En plus de cette propriété universelle, il est parfois utile d'avoir une description explicite des ouverts. Comme expliqué après le lemme 4.3.9, les ouverts de cette topologie sont les parties de la forme ι^*V où V est un ouvert de X . Autrement dit ce sont les intersections d'un ouvert de X avec A . De même les fermés de A sont les intersections d'un fermé de X avec A . Nous n'utiliserons cette information que dans la démonstration du corollaire 4.6.9 qui relie différentes caractérisations de la compacité, mais aucun résultat de ce cours n'en dépend.

4.4. Filtre des voisinages

Les discussions précédentes donnent un cadre très agréable pour étudier la notion de fonction continue. Mais ce cadre ne permet pas facilement de discuter de continuité en un point ou

de suites convergentes. Pour cela nous avons besoin d'une version localisée de la structure topologique.

Définition 4.4.1

Soit X un espace topologique et x un point de X . Le filtre des voisinages de x est

$$\mathcal{N}_x = \{U \subseteq X \mid \exists V \text{ ouvert tel que } x \in V \text{ et } V \subseteq U\}.$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit effectivement d'un filtre. Lorsque la topologie T utilisée sur X n'est pas claire, on écrit $\mathcal{N}_x^T$.

Comme expliqué dans le Chapitre 2, il faut penser à $\mathcal{N}_x$ comme l'ensemble généralisé des points qui sont très proches de x . Il faut bien garder en tête cette intuition en lisant la suite.

Lemme 4.4.2

Soit X un espace topologique et A une partie de X .

- A est ouvert si et seulement si $\forall x \in A, \mathcal{N}_x \leq P(A)$ (pour tout x dans A , tous les points très proches de x sont dans A).
- A est fermé si et seulement si $\forall x, \mathcal{N}_x \wedge P(A) \neq \perp \Rightarrow x \in A$ (pour tout x dans X , si A contient des points très proches de x alors x est dans A).

En particulier la donnée de la fonction $x \mapsto \mathcal{N}_x$ détermine entièrement T .

Mieux, pour toute paire de topologies T et T' , on a $T \leq T' \Leftrightarrow \forall x, \mathcal{N}_x^T \leq \mathcal{N}_x^{T'}$. Autrement dit, l'application $T \mapsto \mathcal{N}^T$ est un plongement d'ensembles ordonnés de $\mathcal{T}(X)$ vers les fonctions de X dans $\mathcal{F}(X)$ (on caractérisera l'image de ce plongement plus loin).

Démonstration: On rappelle que, par la remarque 2.2.7, pour tout filtre F sur X , $F \leq P(A) \Leftrightarrow A \in F$. Ainsi le premier point dit simplement que A est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points, ce qui est connu.

Pour comprendre le second point il faut se souvenir de l'exercice 2.5 qui assure que, pour tout x , $\mathcal{N}_x \wedge P(A) \neq \perp \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}_x, U \cap A \neq \emptyset$. Alternativement on peut contraposer $\forall x, \mathcal{N}_x \wedge P(A) \neq \perp \Rightarrow x \in A$ en $\forall x \in A^c, \mathcal{N}_x \wedge P(A) = \perp$ et utiliser une autre reformulation par le l'exercice 2.5 pour le réécrire en $\forall x \in A^c, \mathcal{N}_x \leq P(A^c)$ avant d'utiliser le point précédent pour le réécrire « A^c est ouvert ».

Montrons maintenant la caractérisation des inégalités. Supposons $T \leq T'$, c'est-à-dire que tout ouvert pour T' est ouvert pour T . Soit x un point et $U \in \mathcal{N}_x^{T'}$. On obtient par définition un ouvert V pour T' qui contient x et est contenu dans U . Comme il est également ouvert pour T , $U \in \mathcal{N}_x^T$. Réciproquement supposons l'inégalité de voisinages. Soit U un ouvert de T' . Montrons que U est ouvert de T . D'après le premier point, il suffit de montrer que U est voisinage de chacun de ses points, ce qui est vrai pour T' par hypothèse sur U puis pour T d'après l'hypothèse sur les voisinages. $\square$

De même on peut utiliser les voisinages, vus comme parties généralisées de X , pour définir les suites convergentes et la continuité en un point.

Définition 4.4.3

Soit X et Y des espaces topologiques, et soit x un point de X .

- On dit qu'une suite $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ converge vers x si $u_* \mathcal{N}_\infty \leq \mathcal{N}_x$.
- On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow Y$ est continue en x si $f_* \mathcal{N}_x \leq \mathcal{N}_{f(x)}$.

Comme le suggère la terminologie, une fonction est continue si et seulement si elle est continue en tout point. Nous pourrions montrer cela artisanalement dès maintenant mais ce n'est pas nécessaire et ce résultat deviendra trivial après le corollaire 4.4.6.

Exercice 4.1 : Soit X un ensemble, Y un espace topologique, $f : X \rightarrow Y$ une fonction, F un filtre sur X , y un point de Y et V une partie de Y . On suppose que F est non trivial (ie. $F \neq \perp$), $f_* F \leq \mathcal{N}_y$ et $\forall^f x \in F, f(x) \in V$.

1. Montrer que la condition $\forall^f x \in F, f(x) \in V$ est équivalente à $f_* F \leq P(V)$.
2. En déduire que y est dans l'adhérence de V .
3. Reformuler ce résultat en termes élémentaires dans le cas où $X = \mathbb{N}$ et $F = \mathcal{N}_\infty$, puis dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et $F = \mathcal{N}_x$ où x est soit un réel soit $\pm\infty$.

Puisque la donnée d'une topologie T détermine tous les $\mathcal{N}_x^T$ et que la donnée de tous les $\mathcal{N}_x^T$ détermine T , il est naturel de se demander si on peut définir la notion de topologie comme la donnée d'une fonction $N : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ associant à chaque point son filtre des voisinages. Une contrainte évidente est que, pour tout x , tout voisinage de x doit contenir x . Autrement dit, on doit avoir $\forall x, P(\{x\}) \leq N(x)$. Mais il y a une contrainte plus subtile qui garantit une sorte de continuité de N et qui est très liée au fait que les ouverts sont voisinages de tous leurs points.

Proposition 4.4.4

Soit X un ensemble et $N : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ une fonction. Il existe une topologie T sur X telle que $\forall x, N(x) = \mathcal{N}_x^T$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall x, P(\{x\}) \leq N(x)$
2. $\forall x, \forall U \in N(x), \forall^f y \in N(x), U \in N(y)$

La première condition se lit « tout point est très proche de lui-même » tandis que la seconde se lit « pour tout point x , tout voisinage de x est également voisinage de tous les points qui sont très proches de x ».

Démonstration : Supposons d'abord que N provient d'une topologie T . La première condition est claire puisque qu'elle affirme simplement que, pour tout x , tout voisinage de x contient x . Montrons la seconde condition. Soit $x \in X$ et U un voisinage de x . Montrons que $\{y \mid U \in N(y)\}$ est un voisinage de x . Il suffit de montrer qu'il contient un voisinage de x . Par définition U contient un voisinage ouvert V de x . Ce V convient car on a bien $\forall y \in V, U \in N(y)$.

Réciproquement, supposons que N vérifie les deux conditions de l'énoncé. On pose $T := \{V \mid \forall x \in V, V \in N(x)\}$. Montrons que T est une topologie dont les voisinages sont donnés par N . Soit $S \subseteq T$. Montrons que la réunion U des éléments de S est dans T . Soit $x \in U$. Par

construction de U , on obtient $V \in S$ tel que $x \in V$. Comme V est dans T , on obtient $V \in N(x)$. Comme $V \subseteq U$ et que $N(x)$ est un filtre, on en déduit $U \in N(x)$.

Supposons maintenant S fini et montrons que l'intersection U des éléments de S est dans T . Soit $x \in U$. Pour chaque $V \in S$, on obtient $x \in V$ et, puisque $V \in T$, $V \in N(x)$. Comme $N(x)$ est un filtre et que S est fini, on en déduit $U \in N(x)$.

On notera que nous n'avons encore utilisé aucune des deux conditions portant sur N . La formule utilisée pour T définit toujours une topologie. L'enjeu est de monter maintenant que les voisinages pour T sont bien donnés par N . Soit $x \in X$. Montrons que $\mathcal{N}_x = N(x)$, par double inégalité.

Montrons d'abord que $\mathcal{N}_x \leq N(x)$. Soit $U \in \mathcal{N}_x$. La première condition sur N fournit $P(\{x\}) \leq N(x)$, donc on obtient $x \in U$. La seconde condition assure que $V := \{y \mid U \in N(y)\}$ est dans $N(x)$. Ce V contient x puisque $U \in N(x)$. Montrons qu'il est contenu dans U . Soit $y \in V$. Par définition de V , $U \in N(y)$ et la première condition appliquée à y assure que $y \in U$. Ainsi on a bien $V \subseteq U$. Montrons que V est ouvert, c'est-à-dire $V \in T$. Soit $y \in V$. Montrons que $V \in N(y)$. Par définition de V , $U \in N(y)$. La seconde condition appliquée à y assure que $\{z \mid U \in N(z)\} \in N(y)$. Or cet ensemble est exactement V par définition de V .

Montrons maintenant que $N(x) \leq \mathcal{N}_x$. Soit $U \in \mathcal{N}_x$. Montrons que $U \in N(x)$. Par définition des voisinages, on obtient $V \in \mathcal{N}_x$ ouvert tel que $V \subseteq U$. Or $N(x)$ est un filtre donc il suffit de montrer que $V \in N(x)$. Par définition de T , $\forall y \in V$, $V \in N(y)$, et il suffit d'appliquer cela à x . $\square$

Nous aurons besoin de plus de propriétés de la fonction qui, pour $x \in X$ fixé, associe à toute topologie T le filtre $\mathcal{N}_x^T$. Pour cela il est commode de lui trouver un adjoint.

Lemme 4.4.5

Soit X un ensemble et $x \in X$. Pour tout filtre F sur X , la fonction de X dans $\mathcal{F}(X)$ définit par

$$y \mapsto \begin{cases} P(\{y\}) & \text{si } y \neq x \\ P(\{x\}) \vee F & \text{si } y = x \end{cases}$$

est la fonction voisinage d'une topologie notée $T_x(F)$ et dont les ouverts sont les $U \subseteq X$ tels que $x \notin U$ ou $U \in F$. De plus

$$T_x \dashv (T \mapsto \mathcal{N}_x^T)$$

et, pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$,

$$f_* \circ T_x = T_{f(x)} \circ f_*$$

(où l'image directe du membre de gauche est celle des topologies et celle du membre de droite est celle des filtres).

Démonstration: Il suffit de vérifier le critère de la proposition 4.4.4. La première condition est claire. Vérifions la seconde. Notons $N : X \mapsto \mathcal{F}(X)$ la fonction de l'énoncé. Soit $y \in X$ et $U \in N(y)$. Comme $P(\{y\}) \leq N(y)$, on a $y \in U$. On distingue selon que $y = x$ ou $y \neq x$.

Supposons d'abord que $y = x$. Il suffit de montrer que $\forall z \in U, U \in N(z)$. Là encore on distingue selon que $z = x$ ou pas. Si $z = x$ on a $U \in N(z)$ par hypothèse. Sinon $N(z) = P(\{z\})$ et donc $U \in N(z)$ puisque $z \in U$.

Supposons maintenant que $y \neq x$. L'ensemble $U \setminus \{x\}$ est alors un voisinage de y dont tous les points admettent U comme voisinage.

Ainsi la fonction N est bien la fonction voisinage d'une topologie $T_x(F)$. La description annoncée pour les ouverts de cette topologie est claire vu le lemme 4.4.2 qui assure qu'un ensemble est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.

Montrons l'adjonction $T_x \dashv (T \mapsto \mathcal{N}_x^T)$. Soit F un filtre et T une topologie sur X . En utilisant que $\forall y, P(\{y\}) \leq \mathcal{N}_y^Y$ on calcule

$$\begin{aligned} T_x(F) \leq T &\Leftrightarrow \forall y, \quad \mathcal{N}_y^{T_x(F)} \leq \mathcal{N}_y^T \quad \text{par le lemme 4.4.2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \neq x, & P(\{y\}) \leq \mathcal{N}_y^T \\ P(\{x\}) \vee F \leq \mathcal{N}_x^T \end{cases} \\ &\Leftrightarrow F \leq \mathcal{N}_x^T \end{aligned}$$

en utilisant que $P(\{x\}) \leq \mathcal{N}_x^T$ entraîne $P(\{x\}) \vee F \leq \mathcal{N}_x^T \Leftrightarrow F \leq \mathcal{N}_x^T$.

Enfin vérifions que l'interaction annoncée avec les images directes découle directement des définitions. Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrons que $f_* \circ T_x = T_{f(x)} \circ f_*$. Soit F un filtre sur X .

$$\begin{aligned} f_* T_x(F) &= \{V \mid f^* V \in T_x(F)\} = \{V \mid x \notin f^* V \text{ ou } f^* V \in F\} \\ &= \{V \mid f(x) \notin V \text{ ou } V \in f_* F\} = T_{f(x)}(f_* F). \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire 4.4.6

Pour tout x dans X , la fonction $T \mapsto \mathcal{N}_x^T$ commute aux inf: pour tout ensemble S de topologies sur X , on a

$$\mathcal{N}_x^{\inf S} = \inf_{T \in S} \mathcal{N}_x^T.$$

De plus la fonction $T \mapsto \mathcal{N}_x^T$ commute aux images réciproques: pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$ et toute topologie T sur Y ,

$$\mathcal{N}_x^{f^* T} = f^* \mathcal{N}_{f(x)}^T.$$

Enfin cette fonction « commute » à l'engendrement: pour tout ensemble S de parties de X ,

$$\mathcal{N}_x^{\langle S \rangle} = \langle \{U \in S \mid x \in U\} \rangle$$

où le $\langle \cdot \rangle$ du membre de gauche désigne la topologie engendrée et celui du membre de droite désigne le filtre engendré.

Démonstration: La première affirmation découle directement du lemme précédent car tout adjoint à droite commute aux infs d'après le théorème 1.4.10.

Pour la seconde affirmation on utilise le corollaire 1.3.14 dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_*} \\ \perp \\ \xleftarrow{f^*} \end{array} & \mathcal{F}(Y) \\
 \uparrow \downarrow \mathcal{N}_x \vdash T_x & & \uparrow \downarrow \mathcal{N}_{f(x)} \vdash T_{f(x)} \\
 \mathcal{T}(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_*} \\ \perp \\ \xleftarrow{f^*} \end{array} & \mathcal{T}(Y)
 \end{array}$$

où les adjoints à gauche commutent d'après le lemme précédent.

Montrons maintenant la commutation à l'engendrement, qui est très similaire. Notons $\iota_{\mathcal{T}}$ (resp. $\iota_{\mathcal{F}}$) l'inclusion de $\mathcal{T}(X)$ (resp. $\mathcal{F}(X)$) dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$. Notons T'_x l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ dans lui-même qui envoie tout ensemble S de parties de X sur $\{U \mid x \notin U \text{ ou } U \in S\}$. Ainsi on a $T'_x \circ \iota_{\mathcal{F}} = \iota_{\mathcal{T}} \circ T_x$ d'après le lemme 4.4.5. Notons φ_x l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}$ dans lui-même qui envoie tout ensemble S de parties de X sur $\{U \in S \mid x \in U\}$. On vérifie sans peine, mais en prenant garde aux ordres opposés, que φ_x est adjoint à droite de T'_x . On peut donc invoquer de nouveau le corollaire 1.3.14, en regardant le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{F}}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\langle \cdot \rangle} \end{array} & \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}} \\
 \uparrow \downarrow \mathcal{N}_x \vdash T_x & & \uparrow \downarrow \varphi_x \vdash T'_x \\
 \mathcal{T}(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{T}}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\langle \cdot \rangle} \end{array} & \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))^{\text{op}}
 \end{array}$$

□

La description des voisinages pour la topologie image réciproque est particulièrement importante pour la topologie induite sur une partie.

Corollaire 4.4.7

Soit X un espace topologie, A une partie de X et a un point de A . On note ι l'inclusion de A dans X . On a

$$\mathcal{N}_a = \iota^* \mathcal{N}_{\iota(a)} \quad \text{et} \quad \iota_* \mathcal{N}_a = \mathcal{N}_{\iota(a)} \wedge P(A).$$

La première égalité signifie que l'ensemble des points de A très proches des a est l'image réciproque par ι de l'ensemble des points de X très proches de a . La seconde signifie que l'image directe par ι de l'ensemble des points de A très proches de a est l'intersection entre l'ensemble des points de X très proches de a et l'ensemble A . Bien sûr ce sont deux façons de dire exactement la même chose.

Démonstration: La première égalité est directement un cas particulier du corollaire précédent. La seconde en découle via l'exercice 2.12 qui assure que, pour tout filtre F sur X , $\iota_* \iota^* F = F \wedge P(\iota_* A) = F \wedge P(A)$. $\square$

Il faut se méfier que la formule pour les voisinages de la topologie image réciproque n'a pas d'analogue pour la topologie image directe dont les voisinages n'ont pas de description agréable.

Cette formule nous permet de revenir comme promis sur la notion de fonction continue en tout point.

Lemme 4.4.8

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est continue si et seulement si elle est continue en tout point.

Démonstration: Il s'agit d'une combinaison directe de résultats déjà établis :

$$\begin{aligned}
 f \text{ continue} &\Leftrightarrow T_X \leq f^* T_Y && \text{par l'observation 4.3.11} \\
 &\Leftrightarrow \forall x, \mathcal{N}_x^{T_X} \leq \mathcal{N}_x^{f^* T_Y} && \text{par le lemme 4.4.2} \\
 &\Leftrightarrow \forall x, \mathcal{N}_x^{T_X} \leq f^* \mathcal{N}_{f(x)}^{T_Y} && \text{par le corollaire 4.4.6} \\
 &\Leftrightarrow \forall x, f_* \mathcal{N}_x^{T_X} \leq \mathcal{N}_{f(x)}^{T_Y} && \text{par adjonction} \\
 &\Leftrightarrow \forall x, f \text{ continue en } x && \text{par définition} \quad \square
 \end{aligned}$$

Pour finir cette discussion des voisinages, il reste à discuter la notion de séparation. Nous avons vu que, pour tout point x d'un espace topologique X , $\mathcal{N}_x$ joue le rôle de « l'ensemble des points très proches de x ». Il est naturel de se demander si un point de X peut être très proche de deux points différents. Cela n'arrive jamais dans un espace métrique mais c'est systématique pour la topologie grossière $\top$ (en supposant que l'espace contienne au moins deux points).

Définition 4.4.9

On dit qu'un espace topologique est séparé si, pour tous points x et y de cet espace, $x \neq y \Rightarrow \mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_y = \perp$. Autrement dit, si x et y sont distincts alors il n'existe aucun point à la fois très proche de x et très proche de y . On utilisera aussi la version contraposée $\mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_y \neq \perp \Rightarrow x = y$.

Vu l'exercice 2.5, la condition de séparation est équivalente à demander que, pour chaque paire de points x et y distincts, il existe $U \in \mathcal{N}_x$ et $V \in \mathcal{N}_y$ tels que $U \cap V = \emptyset$. Mais nous

n'auront pas besoin de cette reformulation alambiquée (au sens où elle double le nombre de quantificateurs mis en jeu).

La condition d'espace séparé admet de nombreuses variantes, mais la définition ci-dessus est exactement la condition qui assure l'unicité des limites.

Lemme 4.4.10

*Soit X un ensemble, F un filtre non trivial sur X , Y un espace topologique séparé, $\varphi : X \rightarrow Y$ une fonction. Supposons que φ tende vers y et y' le long de F , c'est-à-dire $\varphi_*F \leq \mathcal{N}_y$ et $\varphi_*F \leq \mathcal{N}_{y'}$. Alors $y = y'$.*

Cette propriété caractérise les espaces séparés.

Démonstration: Comme $F \neq \perp$, $\varphi_*F \neq \perp$ par l'exercice 2.4. Ainsi on a $\perp < \varphi_*F \leq \mathcal{N}_y \wedge \mathcal{N}_{y'}$, donc $y = y'$.

Réciproquement, supposons que Y vérifie cette propriété. Soit y et y' tels que $F := \mathcal{N}_y \wedge \mathcal{N}_{y'} \neq \perp$. Comme $\text{Id}_*F \leq \mathcal{N}_y$ et $\text{Id}_*F \leq \mathcal{N}_{y'}$, l'hypothèse sur Y assure que $y = y'$. $\square$

Lemme 4.4.11

Une partie d'un espace séparé est toujours séparée.

Démonstration: Cela découle la formule des voisinages pour la topologie image réciproque dans le corollaire 4.4.6. Soit X un espace séparé et $A \subseteq X$. Notons ι l'inclusion de A dans X . Soit a et b dans A tels que $\mathcal{N}_a \wedge \mathcal{N}_b \neq \perp$. On a $\perp \neq \iota^*\mathcal{N}_{\iota(a)} \wedge \iota^*\mathcal{N}_{\iota(b)} = \iota^*(\mathcal{N}_{\iota(a)} \wedge \mathcal{N}_{\iota(b)})$ donc $\perp \neq \mathcal{N}_{\iota(a)} \wedge \mathcal{N}_{\iota(b)}$ et, par séparation de X , $a = b$. $\square$

4.5. Topologies initiales et topologie produit

Définition 4.5.1

Soit X un ensemble et Y une famille d'espaces topologiques indexée par un ensemble I . On note T_i la topologie sur chaque Y_i . Soit φ une famille des fonctions de X dans les Y_i . La topologie initiale associée à φ est

$$T_\varphi := \inf_i \varphi_i^* T_i.$$

Proposition 4.5.2

Dans le contexte de la définition précédente, T_φ est l'unique topologie sur X qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace topologique Z , toute fonction $f : Z \rightarrow X$ est continue si et seulement si tous les $\varphi_i \circ f$ sont continues.

De plus T_φ est le maximum de l'ensemble des topologies sur X pour lesquelles toutes les fonctions φ_i sont continues.

Par ailleurs, pour tout $x \in X$, $\mathcal{N}_x = \inf_i \varphi_i^ \mathcal{N}_{\varphi_i(x)}$.*

Soit Z un ensemble, F un filtre sur Z , $g : Z \rightarrow X$ une fonction et $x \in X$. On a

$$g_*F \leq \mathcal{N}_x \Leftrightarrow \forall i, (\varphi_i \circ g)_*F \leq \mathcal{N}_{\varphi_i(x)}.$$

En particulier une suite u converge vers x si et seulement si, pour tout i , la suite $\varphi_i \circ u$ converge vers $\varphi_i(x)$.

Démonstration: Le fait que T_φ vérifie la propriété annoncée est une combinaison directe de la proposition 4.3.12 et de l'observation 4.3.4. Le fait que les φ_i soient continues provient de cette propriété appliquée à $Z = X$ et $g = \text{Id}$.

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} T_\varphi &= \max(\text{minorants } \{\varphi_i^*T_i ; i \in I\}) && \text{par la remarque 1.4.2} \\ &= \max\{T \mid \forall i, T \leq \varphi_i^*T_i\} \\ &= \max\{T \mid \forall i, \varphi_i \text{ est } (T, T_i)\text{-continue}\} \text{ par l'observation 4.3.11.} \end{aligned}$$

Montrons l'unicité. Supposons que deux topologies T et T' vérifient cette propriété. Montrons que Id_X est (T, T') -continue (et par symétrie des rôles de T et T' on aura aussi l'autre sens et donc $T = T'$). On a vu que la propriété de T assure que chaque φ_i est (T, T_i) -continue. La propriété de T' appliquée à $Z = X$ et $g = \text{Id}$ montre que cela entraîne que Id est (T, T') -continue.

La formule pour les voisinage est une application directe du corollaire 4.4.6.

Montrons que la caractérisation de la convergence en découle. Soit Z un ensemble, F un filtre sur Z , $g : Z \rightarrow X$ une fonction et x un point de X . On a

$$\begin{aligned} g_*F \leq \mathcal{N}_x &\Leftrightarrow g_*F \leq \inf_i \varphi_i^* \mathcal{N}_{\varphi_i(x)} \Leftrightarrow \forall i, g_*F \leq \varphi_i^* \mathcal{N}_{\varphi_i(x)} \\ &\Leftrightarrow \forall i, (\varphi_i)_* g_*F \leq \mathcal{N}_{\varphi_i(x)} \Leftrightarrow \forall i, (\varphi_i \circ g)_*F \leq \mathcal{N}_{\varphi_i(x)} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété universelle de l'inf, l'adjonction entre image directe et image réciproque et la compatibilité entre image directe et composition. $\square$

Corollaire 4.5.3

La catégorie des espaces topologique admet un produit pour toute famille d'objets, l'ensemble sous-jacent à ce produit est le produit des ensembles sous-jacents et les projections sont bien les projections attendues. Une suite à valeur dans un produit converge si et seulement si toutes ses composantes convergent.

Démonstration: Soit X une famille d'espaces topologiques pour Il suffit de munir $\prod_i X_i$ de la topologie initiale associée à la famille des projections. $\square$

On verra dans l'exercice 4.4 comment obtenir également des coproduits par une méthode tout à fait analogue.

On notera que la définition de la topologie initiale $\inf_i \varphi_i^*T_i$ combine les deux opérations que nous avons construites en utilisant la technologie du Chapitre 1 : l'inf sur les topologies et

l'image réciproque. Bien sûr un pourrait expliciter les ouverts de la topologie initiale. Mais l'approche suivie ici montre que ce serait complètement inutile, en plus d'être assez effrayant (par exemple dans le cas de la topologie produit).

La plupart des sources « définissent » la topologie initiale comme étant « la topologie la moins fine rendant les φ_i continues », c'est à dire comme le max apparaissant dans la proposition 4.5.2 en étant souvent d'une pudeur remarquable sur l'existence de ce max. Cette pudeur atteint en général un sommet lorsqu'il s'agit de discuter du critère de convergence des suites.

L'utilisation des lemmes précédents pour établir la propriété universelle ci-dessus cache un peu la simplicité de la démonstration basée uniquement sur la définition de borne inférieure, la caractérisation de la continuité en terme d'image directe et réciproque de topologies, l'adjonction entre ces deux opérations et la compatibilité de l'image directe avec la composition :

$$\begin{aligned}
(\forall i, (\varphi_i \circ f) \text{ continue}) &\Leftrightarrow \forall i, (\varphi_i \circ f)_* T \leq T_i \\
&\Leftrightarrow \forall i, (\varphi_i)_* f_* T \leq T_i \\
&\Leftrightarrow \forall i, f_* T \leq (\varphi_i)^* T_i \\
&\Leftrightarrow f_* T \leq \inf (\varphi_i)^* T_i
\end{aligned}$$

Exercice 4.2 : Soit T et S deux familles des topologies sur des ensembles X et Y indexées par un même ensemble I . On a $(\inf_i T_i) \times (\inf_i S_i) = \inf_i (T_i \times S_i)$ où la croix désigne la topologie produit.

De plus, pour tout topologie T_X sur X , $T_X \times \inf_i S_i = \inf_i (T_X \times S_i)$.

Exercice 4.3 : Soit X, Y, Z et W des ensembles. Soit $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow W$ des fonctions. On note $f \times g$ la fonction de $X \times Y$ dans $Z \times W$ définie par $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$. On notera que le diagramme suivant commute, les applications verticales étant les projections sur les facteurs.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Z \\
p_X \uparrow & & \uparrow p_Z \\
X \times Y & \xrightarrow{f \times g} & Z \times W \\
p_Y \downarrow & & \downarrow p_W \\
Y & \xrightarrow{g} & W
\end{array}$$

Soit T_Z une topologie sur Z et soit T_W une topologie sur W . Montrer que

$$(f \times g)^* (T_Z \times T_W) = f^* T_Z \times g^* T_W.$$

Attention : la formule analogue avec des images directes est fausse en général.

Proposition 4.5.4

Soit X un ensemble et Y une famille d'espaces topologiques indexée par un ensemble I . Soit φ une famille de fonction de X vers les Y_i . On suppose que tous les Y_i sont séparés et que φ sépare les points : pour tous $x \neq x'$, il existe i tel que $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(x')$. Alors X muni de la topologie initiale pour φ est séparé. En particulier un produit d'espaces topologiques séparés est séparé.

Démonstration : Soit x et x' des points distincts de X . Montrons que $\mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_{x'} = \perp$. L'hypothèse sur φ fournit $i \in I$ tel que $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(x')$. Comme Y_i est séparé, on obtient $\mathcal{N}_{\varphi_i(x)} \wedge \mathcal{N}_{\varphi_i(x')} = \perp$. On calcule ensuite en utilisant la proposition 4.5.2 et l'exercice 1.14 :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_{x'} &= \left(\inf_j \varphi_j^* \mathcal{N}_{\varphi_j(x)} \right) \wedge \left(\inf_j \varphi_j^* \mathcal{N}_{\varphi_j(x')} \right) \\ &= \inf_j \left(\varphi_j^* \mathcal{N}_{\varphi_j(x)} \wedge \varphi_j^* \mathcal{N}_{\varphi_j(x')} \right) \\ &= \inf_j \left(\varphi_j^* \left(\mathcal{N}_{\varphi_j(x)} \wedge \mathcal{N}_{\varphi_j(x')} \right) \right) \\ &\leq \varphi_i^* \left(\mathcal{N}_{\varphi_i(x)} \wedge \mathcal{N}_{\varphi_i(x')} \right) \\ &= \perp\end{aligned}$$

donc $\mathcal{N}_x \wedge \mathcal{N}_{x'} = \perp$. □

Exercice 4.4 : Cet exercice construit la topologie finale associée à une famille d'applications et en déduit l'existence de coproduits dans la catégorie des espaces topologiques.

1. Soit $(X_i, T_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et soit $(\varphi_i : X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ une famille de fonctions à valeurs dans un ensemble Y . Montrer qu'il existe une unique topologie sur Y vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout espace topologique Z et toute fonction $f : Y \rightarrow Z$, f est continue si et seulement si $\forall i, f \circ \varphi_i$ est continue. Cette topologie est appelée topologie finale associée à φ .
2. Montrer que la catégorie des espaces topologiques admet de coproduits pour toutes les familles d'objets.

4.6. Compacité

Définition 4.6.1

Soit X un espace topologique, F un filtre sur X et x un point de X . On dit que F converge vers x si $F \leq \mathcal{N}_x$. On dit que x est valeur d'adhérence de F si $F \wedge \mathcal{N}_x \neq \perp$.

Exercice 4.5 : Soit X un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. X est séparé.
2. Tout filtre non trivial sur X converge vers au plus un point.

Le lemme suivant montre que la définition de valeur d'adhérence généralise à la fois la notion d'adhérence d'une partie et de valeur d'adhérence d'une suite.

Lemme 4.6.2

Soit A une partie d'un espace topologique X . Un point x de X est valeur d'adhérence de $P(A)$ si et seulement si x est dans l'adhérence $\overline{A}$ de A .

Pour toute suite $u : \mathbb{N} \rightarrow X$, si x est valeur d'adhérence de la suite u , c'est-à-dire qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u \circ \varphi$ tende vers x , alors x est valeur d'adhérence de $u_\mathcal{N}_\infty$.*

Démonstration: Le premier point découle directement de l'exercice 2.5.

Soit u une suite dans X , x un point de X et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extraction (en fait supposer que φ tend vers l'infini en l'infini suffirait). On suppose $(u \circ \varphi)_*\mathcal{N}_\infty \leq \mathcal{N}_x$. Comme $\varphi_*\mathcal{N}_\infty \leq \mathcal{N}_\infty$ et que u_* est croissante on obtient $(u \circ \varphi)_*\mathcal{N}_\infty \leq u_*\mathcal{N}_\infty$. De plus $\mathcal{N}_\infty \neq \perp$ donc $(u \circ \varphi)_*\mathcal{N}_\infty \neq \perp$ et donc $\perp < (u \circ \varphi)_*\mathcal{N}_\infty \leq u_*\mathcal{N}_\infty \wedge \mathcal{N}_x$. $\square$

On remarquera que l'énoncé précédent ne dit pas que les limites des suites extraites sont les seules valeurs d'adhérence de $u_*\mathcal{N}_\infty$ ni que toute valeur d'adhérence de $P(A)$ est une limite de suite. En effet ces deux énoncés sont faux en général. Il est important de comprendre pourquoi ces subtilités n'apparaissent pas dans le cadre des espaces métriques. Pour cela on a besoin de deux définitions.

Définition 4.6.3

Soit I et X des ensembles et F un filtre sur X . Une fonction $B : I \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est une base de F si, pour tout $U \subseteq X$, $U \in F \Leftrightarrow \exists i, B_i \subseteq U$.

On dit que F est à base dénombrable s'il admet une base pour laquelle I est dénombrable.

On dit qu'un espace topologique est à base dénombrable de voisinages si chacun de ses filtres de voisinages est à base dénombrable.

On notera que tout filtre admet une base, il suffit d'utiliser comme I l'ensemble des éléments du filtre et la fonction identité comme B . Lorsqu'un filtre sur un ensemble X admet une base dénombrable, on peut toujours supposer que cette base est indexée par $\mathbb{N}$, quitte à utiliser X comme valeur pour certains entiers.

Exercice 4.6 : Dans cet exercice on explore le lien entre valeur d'adhérence et suites pour les filtres à base dénombrable. Soit X un ensemble.

1. Soit F un filtre sur X . Montrer que si F admet une base dénombrable alors il admet une base $B : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ décroissante.
2. Dans la suite de cet exercice, on suppose X muni d'une topologie. Soit A une partie de X et x un élément de l'adhérence de A . Montrer que si $\mathcal{N}_x$ est à base dénombrable alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers x .

3. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow X$ une suite et $x \in X$. On suppose que $\mathcal{N}_x$ est à base dénombrable et que x est valeur d'adhérence de $u_* \mathcal{N}_\infty$. Montrer qu'il existe une sous-suite de u qui tend vers x (cette question est plus difficile que les autres).
4. Montrer que dans un espace métrique tout point admet une base dénombrable de voisinages.

Pour conclure sur le lien entre valeur d'adhérence de suites et de filtres, il faut noter que, même dans le cas des espaces métriques, la bonne notion est celle donnée par les filtres. En effet, l'ensemble des valeur d'adhérence d'une suite u à valeurs dans un espace métrique n'est *pas* l'adhérence de son image $u_* \mathbb{N}$. C'est l'adhérence de $u_* \mathcal{N}_\infty$, l'image par u de « l'ensemble des très grands entiers naturels ».

Revenons à la notion générale de valeur d'adhérence. Le lemme suivant donne une description concrète qui sera utilisée dans la démonstration de la proposition 4.6.7.

Lemme 4.6.4

Soit F un filtre sur un espace topologique X . Un point x est valeur d'adhérence de F si et seulement si $\forall U \in F, \forall V \in \mathcal{N}_x, U \cap V \neq \emptyset$. Autrement dit, l'ensemble des valeurs d'adhérence de F est $\bigcap_{U \in F} \overline{U}$.

Démonstration: Soit x un point de X . On a

$$\begin{aligned}
 x \text{ valeur d'adhérence de } F &\Leftrightarrow F \wedge \mathcal{N}_x \neq \perp \\
 &\Leftrightarrow \forall U \in F, \forall V \in \mathcal{N}_x, U \cap V \neq \emptyset \text{ par l'exercice 2.5} \\
 &\Leftrightarrow \forall U \in F, x \in \overline{U} \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{U \in F} \overline{U}.
 \end{aligned}$$

□

Lemme 4.6.5

Soit F un filtre non trivial sur un espace topologique X . Pour tout x dans X , si F converge vers x alors x est valeur d'adhérence de F . Si F est un ultra-filtre alors la réciproque est vraie.

Démonstration: Soit F non trivial qui converge vers un point x . On a $F \leq \mathcal{N}_x$ donc $F \wedge \mathcal{N}_x = F$ et $F \neq \perp$ donc x est valeur d'adhérence de F .

Si on suppose que F est un ultrafiltre ayant x comme valeur d'adhérence alors $\perp < F \wedge \mathcal{N}_x \leq F$ force $F \wedge \mathcal{N}_x = F$ puisque F est un ultrafiltre. Ainsi on a bien $F \leq \mathcal{N}_x$. □

Exercice 4.7 : On dit qu'une application continue f entre deux espaces topologiques X et Y est *propre* si, pour tout filtre F sur X , toute valeur d'adhérence de $f_* F$ est l'image par f d'une valeur d'adhérence de F . Montrer qu'une telle application est automatiquement fermée, c'est-à-dire que l'image directe de tout fermé est fermée.

Il est également utile de vérifier que la notion de valeur d'adhérence se comporte bien vis-à-vis de la topologie induite comme l'assure le lemme suivant.

Lemme 4.6.6

Soit X un espace topologie et A une partie de X . On note ι l'inclusion de A dans X . Soit F un filtre sur X tel que $F \leq P(A)$ et $a \in A$. On a $\iota(a)$ valeur d'adhérence de F si et seulement si a est valeur d'adhérence de ι^*F . Soit G un filtre sur A . Le point a est valeur d'adhérence de G si et seulement si $\iota(a)$ est valeur d'adhérence de ι_*G .

Démonstration: L'exercice 2.13 assure que ι_* est un isomorphisme d'ensemble ordonnés entre $\mathcal{F}(A)$ et $\{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \leq P(A)\}$, d'inverse ι^* . En particulier cet isomorphisme met en bijection les filtres non-triviaux. De plus, comme $F \leq P(A)$, $F \wedge \mathcal{N}_{\iota(a)} \leq P(A)$. On a alors

$$F \wedge \mathcal{N}_{\iota(a)} \neq \perp \Leftrightarrow \iota^*(F \wedge \mathcal{N}_{\iota(a)}) \neq \perp \Leftrightarrow \iota^*F \wedge \iota^*\mathcal{N}_{\iota(a)} \neq \perp \Leftrightarrow \iota^*F \wedge \mathcal{N}_a \neq \perp$$

en utilisant le corollaire 4.4.6 pour avoir $\iota^*\mathcal{N}_{\iota(a)} = \mathcal{N}_a$. L'énoncé sur G est une simple reformulation en utilisant de nouveau l'exercice 2.13. $\square$

Proposition 4.6.7

Soit X un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Pour tout ensemble S d'ouvert de X ,

$$\left(\bigcup_{U \in S} U = X \right) \Rightarrow \exists S' \subseteq S \text{ fini, } \bigcup_{U \in S'} U = X.$$

2. Pour tout ensemble S de fermés de X ,

$$\left(\forall S' \subseteq S \text{ fini, } \bigcap_{F \in S'} F \neq \emptyset \right) \Rightarrow \bigcap_{F \in S} F \neq \emptyset.$$

3. Tout filtre non trivial sur X admet une valeur d'adhérence.
4. Tout ultra-filtre sur X est convergent.
5. On a le principe de récurrence suivant sur $\mathcal{P}(X)$: pour tout prédicat p sur $\mathcal{P}(X)$, si
 - i) $p(\emptyset)$
 - ii) $\forall U \subseteq V, p(V) \Rightarrow p(U)$
 - iii) $\forall U, V, p(U)$ et $p(V) \Rightarrow p(U \cap V)$
 - iv) $\forall x, \exists U \in \mathcal{N}_x, p(U)$

alors $p(X)$.

Démonstration: L'équivalence entre 1) et 2) est un simple passage au complémentaire pour passer des ouverts aux fermés (et de X à $\emptyset$), et une contraposition.

Montrons que 2) $\Rightarrow$ 3). Supposons 2). Soit F un filtre non trivial. Montrons que l'ensemble des valeurs d'adhérence de F n'est pas vide. Le lemme 4.6.4 assure que cet ensemble est $\bigcap_{U \in F} \overline{U}$. Par hypothèse il suffit de montrer que toute intersection finie dans cette famille est non-vide. Or, pour chaque $U \in F$, $U \subseteq \overline{U}$ donc $\overline{U} \in F$ et donc toute intersection finie de tels ensembles est dans F . Comme F n'est pas trivial, $\emptyset \notin F$.

L'implication $3) \Rightarrow 4)$ provient directement du lemme 4.6.5 qui assure qu'un ultra-filtre ayant une valeur d'adhérence converge (en oubliant pas que, par définition, un ultra-filtre n'est jamais trivial).

Montrons que $4) \Rightarrow 3)$. Supposons que tout ultrafiltre sur X converge. Soit F un filtre non trivial sur X . Le théorème 2.5.6 fournit un ultrafiltre G tel que $G \leq F$. Par hypothèse sur X , on obtient x tel que $G \leq \mathcal{N}_x$. On a alors $\perp < G = G \wedge \mathcal{N}_x \leq F \wedge \mathcal{N}_x$ et donc x est valeur d'adhérence de F .

Montrons maintenant que $3) \Rightarrow 5)$. Supposons 3). Soit p un prédicat sur $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les quatre propriétés listées. On pose $F = \{U \subseteq X \mid p(U^c)\}$. Les trois premières propriétés de p assurent exactement que F est un filtre. On veut montrer $p(X)$, c'est-à-dire $\emptyset \in F$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors F est un filtre non trivial et notre hypothèse 3) fournit une valeur d'adhérence x pour F . L'hypothèse iv) sur p fournit $U \in \mathcal{N}_x$ tel que $p(U)$, c'est-à-dire $U^c \in F$. Comme x est valeur d'adhérence de F , tout voisinage de x intersecte tout élément de F d'après le lemme 4.6.4, ce qui contredit $U \cap U^c = \emptyset$.

Enfin montrons que $5) \Rightarrow 1)$. Supposons 5). Soit S un ensemble d'ouverts qui recouvrent X . Soit p le prédicat qui associe à tout $A \subseteq X$ l'énoncé «il existe $S' \subseteq S$ fini tel que $A \subseteq \bigcup_{U \in S'} U$ ». Notre objectif est équivalent à $p(X)$ et nous avons supposé 5) donc il suffit de vérifier les quatre conditions sur p . Pour i), $S' = \emptyset$ convient. Pour ii), soit $U \subseteq V$ tels que $p(V)$. L'hypothèse $p(V)$ fournit S' qui convient également pour U . Pour iii), soit U et V tels que $p(U)$ et $p(V)$. Ces hypothèses fournissent S' pour U et S'' pour V . La réunion $S' \cup S''$ convient pour $U \cup V$. Pour iv), soit $x \in X$. Comme S recouvre X on obtient $U \in S$ tel que $x \in U$. Montrons que U convient. Comme U est ouvert, $U \in \mathcal{N}_x$. De plus $p(U)$ car $S' = \{U\}$ convient. $\square$

Définition 4.6.8

Si X vérifie une des conditions équivalentes de l'énoncé précédent, on dit que X est quasi-compact. Si de plus X est séparé, on dit que X est compact.

Une partie d'un espace topologique est compacte si la topologie induite en fait un espace compact.

Corollaire 4.6.9

Soit X un espace topologique. Une partie A de X est quasi-compacte si et seulement si les cinq conditions équivalentes suivantes sont vérifiées.

1. Pour toute famille $U : I \rightarrow \mathcal{P}(X)$ d'ouverts de X , si $A \subseteq \bigcup_i U_i$ alors il existe $I' \subseteq I$ fini tel que $A \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$
2. Pour toute famille $F : I \rightarrow \mathcal{P}(X)$ de fermés de X , si $A \cap \bigcap_{i \in I'} F_i$ est non vide pour tout $I' \subseteq I$ fini alors $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i$ est non vide.
3. Tout filtre non trivial $F \leq P(A)$ admet une valeur d'adhérence qui appartient à A .
4. Tout ultrafiltre $F \leq P(A)$ converge vers un point de A .
5. Pour tout prédicat p sur $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les conditions i) à iii) de la proposition 4.6.7, si $\forall a \in A, \exists U \in \mathcal{N}_a \wedge P(A), p(U)$ alors $p(A)$.

Démonstration: L'équivalence entre les deux premiers points et les points correspondant de la proposition découle directement de la remarque 4.3.14: les ouverts (resp. fermés) de A sont les intersections des ouverts (resp. fermés) de X avec A . Pour les deux points suivants, l'équivalence découle directement du lemme 4.6.6. On notera que l'isomorphisme entre filtres sur A et filtres inférieur à $P(A)$ sur X fait se correspondre les ultra-filtres car tout isomorphisme d'ensembles ordonnés préserve la collection des éléments non triviaux minimaux.

Pour la dernière condition, il faut relier les prédicats sur $\mathcal{P}(X)$ et sur $\mathcal{P}(A)$. Étant donné p sur $\mathcal{P}(X)$ on peut définir q sur $\mathcal{P}(A)$ qui envoie $B \subseteq A$ sur $p(\iota_* B)$, c'est-à-dire voir B comme partie de A et lui appliquer p . Dans l'autre sens, on peut définir p comme envoyant $C \subseteq X$ sur $q(\iota^* C)$, c'est-à-dire voir $C \cap A$ comme partie de A et lui appliquer q . Cela permet de faire la correspondance entre les conditions i) à iii) (en utilisant que l'injectivité de ι assure que $\iota_* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ commute aux intersections). Pour la dernière condition, il suffit d'utiliser le corollaire 4.4.7 qui assure que, pour tout $a \in A$, $\mathcal{N}_{\iota(a)} \wedge P(A) = \iota_* \mathcal{N}_a$ et la condition ii). $\square$

L'existence de ces cinq conditions équivalentes montre déjà la richesse de la notion de compacité. Dans chaque situation demandant de montrer ou d'utiliser de la compacité, il faut choisir la condition la plus adaptée au problème, même si bien sûr l'équivalence des conditions assure qu'on peut toujours s'en sortir. Un autre thème classique est que les conditions en termes de valeur d'adhérence de filtres permettent de généraliser les démonstrations utilisant les suites des espaces métriques aux espaces topologiques généraux. Nous allons maintenant voir des exemples illustrant ces thèmes.

Commençons par un exemple qui se prête bien à l'utilisation des recouvrement par des ouverts ou à celles des filtres.

Lemme 4.6.10

L'image directe d'une partie quasi-compacte par une application continue est quasi-compacte.

Démonstration: Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue entre espaces topologiques. Soit $A \subseteq X$ une partie quasi-compacte. Montrons que $f_* A$ est quasi-compacte.

On commence par une démonstration via les recouvrements ouverts. Soit $U : I \rightarrow \mathcal{P}(f_*(A))$ un recouvrement ouvert. Comme f est continue, $f^* \circ U : I \rightarrow \mathcal{P}(A)$ est une famille d'ouverts de A . En utilisant l'unité de l'adjonction $f_* \dashv f^*$ et le fait que f^* commute aux unions, on calcule

$$A \subseteq f^* f_* A = f^* \bigcup_i U_i = \bigcup_i f^* U_i$$

donc $f^* \circ U$ recouvre A . Comme A est quasi-compacte, on obtient $I' \subseteq I$ finie telle que $A = \bigcup_{i \in I'} f^* U_i$. En utilisant que l'image directe commute aux unions et la co-unité de l'adjonction $f_* \dashv f^*$, on calcule

$$f_* A = f_* \bigcup_{i \in I'} f^* U_i = \bigcup_{i \in I'} f_* f^* U_i \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$$

donc la restriction de U à I' recouvre f_*A .

Comme intermède, voyons comment démontrer cela à l'aide de suites en supposant que X et Y sont des espaces métriques. Soit $v : \mathbb{N} \rightarrow f_*A$ une suite. Montrons que v admet une valeur d'adhérence. La définition de f_*A et l'axiome du choix permettent d'obtenir une suite $u : \mathbb{N} \rightarrow A$ telle que $v = f \circ u$. Comme A est compacte, on obtient une extraction φ telle que $u \circ \varphi$ converge vers une limite a dans A . La continuité de f assure alors que $v \circ \varphi$ converge vers $f(a)$ qui est bien dans f_*A .

Voyons maintenant comment adapter le paragraphe précédent au cas général en remplaçant les suites par des filtres. Soit G un filtre sur Y tel que $\perp < G \leq P(f_*A)$. Le filtre $P(A) \wedge f^*G$ n'est pas trivial car $f_*(P(A) \wedge f^*G) = P(f_*A) \wedge G = G \neq \perp$ (en utilisant le lemme 2.4.15 et l'hypothèse $G \leq P(f_*A)$). De plus $P(A) \wedge f^*G \leq P(A)$ donc l'hypothèse sur A fournit $a \in A$ tel que $P(A) \wedge f^*G \wedge \mathcal{N}_a \neq \perp$. On a donc $\perp < f_*(f^*G \wedge \mathcal{N}_a) \leq f_*f^*G \wedge f_*\mathcal{N}_a \leq G \wedge \mathcal{N}_{f(a)}$ où la dernière inégalité utilise la co-unité de $f_* \dashv f^*$ et la continuité de f .

On notera une différence avec l'utilisation des suites : il n'y a pas d'analogue du choix arbitraire de la suite u relevant v dans A . Dans le cas des filtres, le filtre $P(A) \wedge f^*G$ est là sans se poser de questions. $\square$

Voyons maintenant un exemple où la condition sur les familles de fermés est particulièrement naturelle à utiliser mais où de nouveau la condition sur les valeurs d'adhérence de filtres permet d'écrire une variante de la démonstration via les suites.

Lemme 4.6.11

Un fermé dans un espace (quasi)-compact est (quasi)-compact.

Démonstration: Le lemme 4.4.11 assure qu'une partie d'un espace séparé est séparée donc il reste à comprendre la quasi-compactité. Il est commode de passer par la caractérisation en terme d'intersection de fermés. Soit A un fermé d'un espace compact X . Soit C une famille de fermés de A indexée par un ensemble I . On suppose que, pour tout $I' \subseteq I$ fini, $\bigcap_{i \in I'} C_i \neq \emptyset$. Comme A est fermé, les C_i sont également fermés dans X donc la compacité de X assure que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

Comme intermède, voyons la démonstration séquentielle utilisable des les espaces métriques. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow A$ une suite. Montrons que u admet une sous-suite qui converge dans A . La (quasi)-compacité de X fournit une extraction φ et $x \in X$ tels que $u \circ \varphi$ tend vers x . Comme A est fermé et que $u \circ \varphi$ est à valeurs dans A , on obtient $x \in A$.

Voyons maintenant comme les filtres permettent d'adapter cette démonstration au cas général. Soit F un filtre sur X tel que $\perp < F \leq P(A)$. La quasi-compactité de X fournit $x \in X$ tel que $\perp < F \wedge \mathcal{N}_x$. Or $F \wedge \mathcal{N}_x \leq P(A) \wedge \mathcal{N}_x$ donc x est valeur d'adhérence de A . Comme A est fermé, $x \in A$.

La démonstration par les filtres est plus simple que celle par les suites car la notion de valeur d'adhérence d'un filtre est plus simple que celle de suite extraite et plus directement

liée à l'adhérence des parties. En effet la notion de valeur d'adhérence d'une suite n'est *pas* équivalente à celle de valeur d'adhérence de l'image de cette suite. $\square$

Dans la démonstration de la proposition 4.6.7, la condition 4) n'a permis d'atteindre les autres conditions que via le théorème 2.5.6 et donc l'axiome du choix. Cette condition jouera donc un rôle particulièrement puissant dans la suite. L'exemple le plus célèbre de cette puissance est la démonstration suivante.

Théorème 4.6.12 (*de Tychonov*)

Un produit d'espaces (quasi)-compacts est (quasi)-compact.

Démonstration: Nous avons déjà vu dans la proposition 4.5.4 qu'un produit d'espaces séparés est séparé. Il suffit donc de montrer qu'un produit d'espaces X_i quasi-compacts est quasi-compact. On utilise la caractérisation par les ultra-filtres dans la proposition 4.6.7. Soit F un ultra-filtre sur $\prod_i X_i$. On note p la familles projections. Pour chaque i , le exercice 2.14 assure que $(p_i)_* F$ est un ultrafiltre sur X_i et donc l'hypothèse de quasi-compacité fournit x_i tel que $(p_i)_* F \leq \mathcal{N}_{x_i}$. L'axiome du choix permet de choisir d'un coup de tels x_i pour obtenir $x \in \prod_i X_i$. Montrons que ce x convient. Comme, par adjonction, $\forall i, F \leq (p_i)^* \mathcal{N}_{x_i}$, on obtient $F \leq \inf_i (p_i)^* \mathcal{N}_{x_i} = \mathcal{N}_x$, où la dernière égalité provient de la proposition 4.5.2. $\square$

La condition 5) semble de nature assez différente des autres mais nous avons vu qu'il est facile de la relier aux conditions 1) et 3). Les autres implications avec 1 et 3) sont d'ailleurs tout aussi faciles à démontrer directement. On peut aussi noter que la première condition $p(\emptyset)$ est presque toujours redondante, la seule exception étant le cas où X est vide. Mais en pratique elle ne coûte jamais rien à vérifier.

Voyons tout de suite un exemple de situation dans laquelle ce principe de récurrence est le plus commode à utiliser lorsqu'on sait qu'un espace est quasi-compact (cette condition est toujours utilisée lorsqu'on sait qu'un espace est quasi-compact, pas pour montrer qu'un espace est quasi-compact).

Proposition 4.6.13 (*Nombre de Lebesgue d'un recouvrement*)

Soit X un espace métrique compact et $U : I \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une famille d'ouverts recouvrant X .

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de rayon au plus ε est contenu dans un des U_i .

Démonstration: On note p le prédicat sur $\mathcal{P}(X)$ qui à tout $A \subseteq X$ associe l'énoncé « il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule centrée en un point de A et de rayon au plus ε est dans un des U_i ». Nous voulons montrer que $p(X)$ par récurrence sur les parties de X qui est compact. Vérifions les quatre conditions.

- i) $p(\emptyset)$ est clair: n'importe que $\varepsilon > 0$ convient.
- ii) Soit $U \subseteq V$ tels que $p(V)$. L'hypothèse sur V fournit un ε qui convient également pour U .
- iii) Soit U et V tels que $p(U)$ et $p(V)$. L'hypothèse sur U fournit ε , l'hypothèse sur V fournit ε' et $\min(\varepsilon, \varepsilon')$ convient pour $U \cup V$.

iv) Soit $x \in X$. Comme U recouvre X , on obtient i tel que $x \in U_i$. Comme U_i est ouvert, on obtient $\delta > 0$ tel que $B_\delta(x) \subseteq U_i$. Montrons que $U = B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ convient. On a bien $U \in \mathcal{N}_x$. Pour montrer $p(U)$, montrons que $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ convient. Soit $y \in U$ et $r \leq \varepsilon$. L'inégalité triangulaire assure que $B_r(y)$ est contenue dans $B_\delta(x)$ donc dans U_i . $\square$

Exercice 4.8 : Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Heine-Cantor en utilisant le principe de récurrence pour les parties d'un espace compact. Soit X et Y deux espaces métriques. On suppose que X est compact. Soit f une fonction continue de X dans Y . On veut montrer que f est uniformément continue. On fixe $\varepsilon > 0$ et considère le prédicat p sur les parties de $X \times X$ qui associe à U l'énoncé

$$p(U) : \exists \delta > 0, \forall (x, x') \in U, d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

1. Montrer que ce prédicat vérifie les conditions du principe de récurrence et conclure.
2. Comparer avec la démonstration correspondante via le principe de sous-recouvrement fini.

4.7. Algèbre topologisée

Cette dernière partie de chapitre est consacrée aux structures algébriques munies d'une topologie compatible. Le but principal est d'étudier les espaces vectoriels munis d'une topologie ne provenant pas d'une norme (ni même d'une distance) afin de récupérer de la compacité. Mais au passage nous verrons également qu'un certain nombre de propriétés bien connus des espaces vectoriels normés sont en fait bien plus générales. Comme d'habitude, la généralité n'est pas un but en soit, elle vise à mieux comprendre ce qui fait fonctionner les choses.

Définition 4.7.1

Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie telle que la multiplication et l'inversion sont des fonctions continues.

Un anneau topologique est un anneau muni d'une topologie telle que l'addition, la soustraction et la multiplication sont des fonctions continues.

Un corps topologique est un corps muni d'une topologie qui en fait un anneau topologique et telle que l'inversion est continue (sur le complémentaire de zéro).

Un module topologique est un groupe topologique (additif) qui est un module sur un anneau topologique et tel que la multiplication scalaire est continue.

Un espace vectoriel topologique est un groupe topologique (additif) qui est un espace vectoriel sur un corps topologique et tel que la multiplication scalaire est continue.

Il est bien connu qu'une application linéaire entre espaces vectoriels normés est continue si (et seulement si) elle est continue en zéro. Montrons que ce résultat n'a rien à voir avec les espaces vectoriels ou les normes. La clef est que dans un groupe topologique les voisinages de tous les points sont liés par les translations (disons à gauche) et que les morphismes de groupes commutent aux translations. Les translations $L_g : h \mapsto gh$ sont continues puisque

la multiplication est continue. Et l'inverse d'une translation L_g est $L_{g^{-1}}$ donc L_g est un homéomorphisme. Nous aurons besoin d'un résultat général sur les homéomorphismes.

Lemme 4.7.2

Soit X et Y des espaces topologiques et $h : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme. Pour tout x dans X , $h_* \mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{h(x)}$.

Démonstration: Comme h^{-1} est continue en $h(x)$, on obtient $h^{-1}_* \mathcal{N}_{h(x)} \leq \mathcal{N}_x$. En appliquant h_* à cette inégalité on obtient $\mathcal{N}_{h(x)} \leq h_* \mathcal{N}_x$. Comme h est continue en x on a également $h_* \mathcal{N}_x \leq \mathcal{N}_{h(x)}$ et on conclut par anti-symétrie. $\square$

Corollaire 4.7.3

Dans un groupe topologique, pour tout g on a $\mathcal{N}_g = (L_g)_* \mathcal{N}_1$ où L_g est la translation à gauche par g .

Nous pouvons maintenant démontrer le critère de continuité annoncé.

Lemme 4.7.4

Un morphisme de groupes $\varphi : G \rightarrow H$ entre deux groupes topologiques est continue si (et seulement si) il est continue en 1.

Démonstration: Supposons que φ est continue en 1, c'est-à-dire $\varphi_* \mathcal{N}_1 \leq \mathcal{N}_1$ puisque $\varphi(1) = 1$. Soit $g \in G$. Montrons que φ est continue en g . Comme φ est un morphisme de groupes, on a $\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi$ et on peut utiliser le corollaire précédent pour calculer

$$\begin{aligned} \varphi_* \mathcal{N}_g &= \varphi_* (L_g)_* \mathcal{N}_1 = (\varphi \circ L_g)_* \mathcal{N}_1 = (L_{\varphi(g)} \circ \varphi)_* \mathcal{N}_1 \\ &= (L_{\varphi(g)})_* \varphi_* \mathcal{N}_1 \leq (L_{\varphi(g)})_* \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_{\varphi(g)} \end{aligned}$$

en utilisant que $(L_{\varphi(g)})_*$ est croissante. $\square$

On se concentre maintenant sur le cas des espaces vectoriels topologiques (evt). Il est bien connu qu'une application linéaire entre espaces vectoriels normés est continue dès qu'elle est bornée sur la boule unité. Pour montrer que cela n'a rien à voir avec les normes, il faut définir une notion d'ensemble borné dans un evt.

Définition 4.7.5

Soit K un corps topologique et E un K -evt. On dit qu'une partie A de E est bornée (au sens de von Neumann) si

$$\forall V \in \mathcal{N}_{0_E}, \exists t \in K^\times, A \subseteq tV$$

$$\text{où } tV = \{x \in E \mid \exists v \in V, x = tv\}.$$

Exemple 4.7.6 : Soit E un K -evn, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une partie A de E est bornée au sens de von Neumann si et seulement si elle est bornée au sens des espaces métriques. En effet si

$A \subseteq B_r(0)$ pour un certain rayon r et V est un voisinage de 0 alors V contient $B_\varepsilon(0)$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et $t = \frac{r}{\varepsilon}$ convient. Réciproquement si A est borné au sens de von Neumann alors on obtient t tel que $A \subseteq tB_1(0) = B_{|t|}(0)$ et donc A est borné.

Lemme 4.7.7

Soit E et F des evt et $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si φ est bornée sur un voisinage de 0 alors φ est continue.

Démonstration: Soit V un voisinage de zéro. Supposons que φ_*V est borné. Montrons que φ est continue. D'après le lemme 4.7.4 il suffit de montrer que φ est continue en zéro. Soit $W \in \mathcal{N}_{0_F}$. Comme φ_*V est borné, on obtient $t \in K^\times$ tel que $\varphi(V) \subseteq tW$. Comme φ est linéaire, on peut récrire cette inclusion comme $\varphi(\frac{1}{t}V) \subseteq W$ ou encore $\frac{1}{t}V \subseteq \varphi^*W$ par adjonction. Or $\frac{1}{t}V \in \mathcal{N}_{0_E}$ car $x \mapsto \frac{1}{t}x$ est un homéomorphisme qui envoie 0 sur 0. Donc $\varphi^*W \in \mathcal{N}_{0_E}$. $\square$

Il faut se méfier du fait que le lemme précédent n'est pas une équivalence. En général il peut n'y avoir aucun voisinage borné de zéro dans un evt.

L'objectif suivant est de montrer que la topologie initiale associée à une famille d'applications linéaires à valeur dans des evt est une topologie d'evt. Nous allons décomposer cela en deux petits lemmes concernant les ingrédients entrant dans la définition de la topologie initiale (inf et image réciproque) précédés d'un lemme général simplifiant ce genre de résultats.

Lemme 4.7.8

Pour montrer qu'un espace vectoriel E sur un corps topologique K est un evt, il suffit de montrer que l'addition et la multiplication scalaire sont continues.

Démonstration: La négation peut s'écrire $(-) = (\cdot) \circ (x \mapsto (-1, x))$ et la multiplication scalaire est continue. $\square$

Lemme 4.7.9

*Soit K un corps topologique et E et F des K -espaces vectoriels. Pour toute fonction linéaire $f : E \rightarrow F$ et toute topologie T d'evt sur F , f^*T est une topologie d'evt sur E .*

Démonstration: Montrons la continuité de l'addition. On utilise la caractérisation en terme d'image réciproque de topologie. On a

$$\begin{aligned}
 (+_E)^* f^* T_F &= (f \circ (+_E))^* T_F && \text{image réciproque par composition} \\
 &= ((+_F) \circ (f \times f))^* T_F && f \text{ préserve l'addition} \\
 &= (f \times f)^* (+_F)^* T_F && \text{image réciproque par composition} \\
 &\geq (f \times f)^* (T_F \times T_F) && \text{continuité } (+_F) \text{ et croissance } (f \times f)^* \\
 &= (f^* T_F) \times (f^* T_F) && \text{par l'exercice 4.3}
 \end{aligned}$$

Montrons de même la continuité de la multiplication scalaire. On a

$$\begin{aligned}
(\cdot_E)^* f^* T_F &= (f \circ (\cdot_E))^* T_F && \text{image réciproque par composition} \\
&= ((\cdot_F) \circ (Id_K \times f))^* T_F && f \text{ préserve la multiplication scalaire} \\
&= (Id_K \times f)^* (\cdot_F)^* T_F && \text{image réciproque par composition} \\
&\geq (Id_K \times f)^* (T_K \times T_F) && \text{continuité } (\cdot_F) \text{ et croissance } (Id_K \times f)^* \\
&= (Id_K^* T_K) \times (f^* T_F) && \text{par l'exercice 4.3} \\
&= T_K \times (f^* T_F)
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.7.10

Soit K un corps topologique et E un K -espace vectoriel. Pour toute famille T de topologies d'evt sur E , $\inf_i T_i$ est aussi une topologie d'evt.

Démonstration: Montrons d'abord que l'addition $(+)$ est continue, en utilisant l'observation 4.3.11 et l'exercice 4.2.

$$\begin{aligned}
\inf_i T_i \times \inf_i T_i &= \inf_i (T_i \times T_i) \\
&\leq \inf_i (+)^* T_i \text{ car } \forall i, T_i \times T_i \leq (+)^* T_i \\
&= (+)^* \inf_i T_i
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la multiplication scalaire $(\cdot)$ est continue, en utilisant l'observation 4.3.11 et l'exercice 1.14.

$$\begin{aligned}
T_K \times \inf_i T_i &= \inf_i (T_K \times T_i) \\
&\leq \inf_i (\cdot)^* T_i \text{ car } \forall i, T_K \times T_i \leq (\cdot)^* T_i \\
&= (\cdot)^* \inf_i T_i.
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant assembler les morceaux pour obtenir le résultat promis.

Proposition 4.7.11

Soit K un corps topologique, E un K -ev et F une famille de K -evt indexée par un ensemble I . Soit φ une famille d'applications linéaires de E dans les F_i . La topologie initiale T_φ est une topologie de K -evt sur E .

Démonstration: Il s'agit de la concaténation des deux lemmes précédents. □

Exemple 4.7.12 : Soit E un evt. On note E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E .

- La topologie initiale associée à la famille des éléments $\lambda : E \rightarrow K$ de E' est appelée topologie faible sur E . La proposition 4.5.2 assure qu'une suite $u : \mathbb{N} \rightarrow E$ converge vers un élément e pour cette topologie si et seulement si, pour toute forme linéaire continue λ sur E , $\lambda(u_n)$ converge vers $\lambda(e)$.

- La topologie initiale associée à la famille des évaluations $\text{ev}_x : E' \rightarrow K$ pour $x \in E$ est appelée topologie faible- $\star$ sur E' . La proposition 4.5.2 assure qu'une suite $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow E'$ converge vers un élément μ pour cette topologie si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\lambda_n(x)$ converge vers $\mu(x)$.

Exercice 4.9 : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de sa topologie usuelle. Soit E et F des $\mathbb{K}$ -evt.

1. Montrer que toute forme linéaire continue $\lambda \in E'$ est faiblement continue, c'est-à-dire continue de E muni de sa topologie faible dans $\mathbb{K}$.
2. Soit φ une application linéaire continue de E dans F . Montrer que φ est faiblement continue, c'est-à-dire continue de E muni de sa topologie faible dans F muni de sa topologie faible.

On veut maintenant tenir la promesse de récupérer de la compacité en dimension infinie. Pour cela, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 4.7.13

Soit V une partie d'un evt E sur un corps normé K . L'ensemble polaire de V est

$$V^\circ = \{\lambda \in E' \mid \forall x \in V, |\lambda(x)| \leq 1\}.$$

Exemple 4.7.14 : Soit E un evn. L'ensemble polaire de la boule unité fermée autour de zéro dans E est la boule unité fermée pour la norme duale sur E' .

Théorème 4.7.15 (Bourbaki-Banach-Alaoglu)

On note K le corps des réels ou des complexes, muni de sa topologie usuelle. L'ensemble polaire de tout voisinage de l'origine dans un K -evt est compact pour la topologie faible- $\star$.

En particulier la boule unité du dual d'un K -evn est compact pour la topologie faible- $\star$. On en déduit que tout fermé borné pour la topologie de la norme sur E' est compact pour la topologie faible- $\star$.

Démonstration : Soit V un voisinage de l'origine dans un K -evt E . Montrons d'abord que V° est fermé. Notons G l'ensemble des fonctions de E dans K muni de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie initiale pour la famille des évaluations $\text{ev}_x : G \rightarrow K$. En particulier chaque ev_x est continue. Par définition la topologie faible sur E' est la topologie de E' vue comme partie de G . Pour chaque x et y dans E et λ dans K , $\{f : E \rightarrow K \mid f(kx + y) = kf(x) + f(y)\}$ est fermé dans G car c'est l'image réciproque de $\{0_K\}$ par l'application $\text{ev}_{kx+y} - k\text{ev}_x - \text{ev}_y$ qui est continue puisque les évaluations, la soustraction et la multiplication scalaire sont continues.

De même pour chaque $v \in V$, $\{f : E \rightarrow K \mid |f(v)| \leq 1\}$ est fermé.

Ainsi il suffit de montrer que

$$V^\circ = \bigcap_{x,y,k} \{f : E \rightarrow K \mid f(kx + y) = kf(x) + f(y)\} \cap \bigcap_{v \in V} \{f : E \rightarrow K \mid |f(v)| \leq 1\}.$$

L'inclusion de V° dans cet ensemble est clair car la première intersection équivaut à la linéarité et la seconde correspond directement à la définition de la polaire. Il ne reste qu'à voir que la continuité est automatique, ce qui découle du lemme 4.7.7 puisque V est un voisinage de l'origine dans E .

Affirmation : $\forall x \in E, \exists M \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in V^\circ, |\lambda(x)| \leq M$.

Démonstration : Soit $x \in E$. La fonction $\varphi_x : k \mapsto kx$ est continue de K dans E et $V \in \mathcal{N}_0$ donc on obtient $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(0_K) \subseteq \varphi_x^* V$. Montrons que $M = \frac{1}{\varepsilon}$ convient. Soit $\lambda \in V^\circ$. Comme $\varepsilon x \in V$ on a $|\lambda(\varepsilon x)| \leq 1$ et donc $|\lambda(x)| \leq M$.

En utilisant l'affirmation et l'axiome du choix, on obtient une fonction $M : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E, \forall \lambda \in V^\circ, |\lambda(x)| \leq M(x)$. Ainsi, en voyant G comme produit de copies de K indexées par E , on a $V^\circ \subseteq \prod_{x \in E} \overline{B}_{M(x)}(0_K)$ qui est compact par le théorème 4.6.12. Puisque V° est fermé dans un compact, il est compact par le lemme 4.6.11. $\square$

Dans ce théorème, l'hypothèse que K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est inutilement restrictive. En examinant la démonstration on peut se convaincre qu'on utilise qu'il s'agit d'un corps muni d'une valeur absolue non-triviale (au sens où il existe un élément dont la norme n'est ni 0 ni 1) et pour lequel les boules fermées sont compactes. Cela fonctionnerait par exemple avec les nombres p -adiques.