Université Paris-Sud	**Feuille 1**	Master 2 AAG
Centre d'Orsay	**Groupes de Lie**	Géométrie Riemannienne
Mathématiques		2012-2013

Les groupes de Lie classiques sont des groupes de Lie

Exercice 1 – Soient G un groupe de Lie réel, V un espace vectoriel réel de dimension finie, et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes de Lie. Pour tout $v \in V$, on note $G_v = \{g \in G \mid \rho(g)v = v\}$ le stabilisateur de v dans G.

1. En considérant $\mu : G \to V$ définie par $\mu(g) = \rho(g)v$, et en utilisant le théorème du rang constant, montrer que G_v est un sous-groupe de Lie plongé de G. En décrire l'algèbre de Lie.
2. *Application :* montrer que tous les groupes linéaires dits « classiques » introduits en cours sont des groupes de Lie, et déterminer leurs algèbres de Lie.
3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle (resp. complexe). On note $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ son groupe d'automorphismes. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un groupe de Lie réel (resp. complexe). Quelle est son algèbre de Lie ?

Champs et formes différentielles invariants

Exercice 2 – Dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note Δ_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. On désigne par $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ le champ de vecteurs sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(M) = \Delta_{ij}$ pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\overline{X}$ le champ invariant à gauche sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ défini par X. Exprimer $\overline{X}$ dans le champ de repères $(\frac{\partial}{\partial x_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$.
2. Si $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définissent deux champs invariants à gauche $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, exprimer $[\overline{X}, \overline{Y}]$ dans le champ de repères $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$, et vérifier que l'on a bien $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{XY - YX}$.
3. Quel est le flot associé à $\overline{X}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?
4. Soit G un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Montrer que si $X \in \mathfrak{g}$ alors $\exp(tX) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 – Soit G un groupe de Lie de dimension $n \geq 1$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1. Montrer que les n-formes différentielles ω sur G qui sont invariantes à gauche, *i.e* telles que $L_g^*(\omega) = \omega$ pour tout $g \in G$, forment un espace vectoriel de dimension 1, en bijection naturelle avec $\Lambda^n(\mathfrak{g}^*)$.
2. Soit ω une n-forme différentielle sur G invariante à gauche. Montrer que, pour tout $g \in G$, la forme différientielle $(R_g)^*\omega$ est invariante à gauche. À quel élément de $\Lambda^n(\mathfrak{g}^*)$ correspond-elle ?
3. Soit ω une n-forme différentielle non nulle, invariante à gauche sur G. À quelle condition sur G a-t-on $\int_G \omega < \infty$?
4. Montrer que si G est compact et connexe, alors toute n-forme différentielle invariante à gauche (resp. à droite) est automatiquement bi-invariante. Qu'en est-il pour le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ (le groupe affine de la droite réelle) ? Donner un énoncé général impliquant la représentation adjointe.

Exercice 4 – Soit G un groupe de Lie compact, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation continue, où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer que $\rho(G)$ préserve un produit scalaire sur V (*indication :* on pourra « moyenner » un produit scalaire quelconque sur V par l'action de G). En déduire que V s'écrit comme une somme directe de sous-espaces irréductibles pour $\rho(G)$.
2. Montrer que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. de $\mathrm{U}(n)$).

Décomposition polaire et topologie des groupes de matrices

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathcal{H}(n)$ l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathcal{H}^+(n)$ l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives. Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on notera M^* la transconjuguée de M : $M^* = {}^t\overline{M}$. Enfin, on désigne par exp l'exponentielle de matrices dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$: $\exp(M) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Exercice 5 –

1. Montrer que exp réalise un difféomorphisme de $\mathcal{H}(n)$ sur $\mathcal{H}^+(n)$.
2. Soit $H \in \mathcal{H}^+(n)$. Montrer qu'il existe un unique élément de $\mathcal{H}^+(n)$, noté $\sqrt{H}$ tel que $(\sqrt{H})^2 = H$. Montrer que l'application $H \mapsto \sqrt{H}$ est un difféomorphisme de $\mathcal{H}^+(n)$ dans lui-même.
3. Pour tout $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on note $h(g) = \sqrt{g^*g}$, et $u(g) = gh(g)^{-1}$. Montrer que l'application $\mu : g \mapsto (u(g), h(g))$ est un difféomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{U}(n) \times \mathcal{H}^+(n)$. On appelle la décomposition $g = u(g)h(g)$ la *décomposition polaire* de g.
4. Montrer que si $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $u(g) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $h(g) \in \mathcal{S}^+(n)$ (l'ensemble des matrices symétriques, réelles, définies positives).

   On dit que $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est *un sous-groupe pseudo algébrique* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ s'il est défini par des équations polynômiales sur ses parties réelles et imaginaires ; autrement dit, il existe des polynômes en $2n^2$ variables $P_1, \dots, P_s$ de sorte que $G = \{M = A + iB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid P_1(A_{ij}, B_{lk}) = \dots = P_s(A_{ij}, B_{lk}) = 0\}$. On dit qu'un sous-groupe $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est autoadjoint lorsque $G^* = G$.
5. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$. On suppose qu'il existe m nombres réels $b_1, \dots, b_m$ tels que $P(e^{b_1 t}, \dots, e^{b_m t}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'alors $P(e^{b_1 t}, \dots, e^{b_m t}) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que si G est un sous-groupe pseudo-algébrique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est de plus autoadjoint, alors la décomposition polaire est *interne* à G, autrement dit $u(g)$ et $h(g)$ sont dans G, pour tout $g \in G$. En déduire que G est difféomorphe au produit $(G \cap \mathrm{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathcal{H}(n))$.
7. Un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dit auto-adjoint s'il est stable par transposition. Il est algébrique s'il existe des polynômes à n^2 variables et à coefficients réels $P_1, \dots, P_s$ tels que $G = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid P_1(M) = \dots = P_s(M) = 0\}$. Montrer que si un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est algébrique et autoadjoint alors G est difféomorphe à $(G \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) \times (\mathfrak{g} \cap \mathcal{S}(n))$.
8. Soit G un sous-groupe pseudo-algébrique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui soit autoadjoint. Montrer que $K_G := G \cap \mathrm{U}(n)$ est un sous-groupe de Lie compact de G. Montrer que K_G est maximal, au sens ou si $K \subset G$ est un sous-groupe compact qui contient K_G, alors $K = K_G$. Montrer de même que si G est un sous-groupe algébrique auto-adjoint de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $G \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de G.
9. Appliquer les résultats précédents à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{U}(p, q)$.
10. Déterminer le groupe fondamental des groupes suivants : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(2, 2)$, $\mathrm{SU}(2, 2)$, $\mathrm{SO}(2, 2)$.