Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématiques

Feuille 10
Sous-variétés riemanniennes

Master 2 AAG
Géométrie Riemannienne
2012-2013

Exercice 1 – Voisinages tubulaires
Soient (M, g) une variété riemannienne et P une sous-variété compacte sans bord de M. On note νP le fibré normal à P dans (M, g), c'est-à-dire l'orthogonal de TP dans $TM_{|P}$.

1. Montrer que, si $\varepsilon > 0$ est suffisament petit, l'exponentielle pour la métrique g est un difféomorphisme de $D_\varepsilon \nu P = \{v \in \nu P\ ;\ \|v\| < \varepsilon\}$ sur un voisinage ouvert de P. Ce voisinage sera appelé le voisinage tubulaire de rayon ε autour de P.
2. Montrer que, si ε est suffisament petit, l'exponentielle envoie $\nu^\varepsilon P = \{v \in \nu P\ ;\ \|v\| = \varepsilon\}$ sur l'ensemble des points de M à distance exactement ε de P.

Exercice 2 – Formule de Weyl pour les surfaces dans $\mathbb{R}^3$
Le but de cet exercice est de calculer le volume des voisinages tubulaires des surfaces compactes sans bord et coorientées dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$. Soient Σ une telle surface et N la normale unitaire à Σ, c'est-à-dire l'unique section de $\nu^1\Sigma$ pointant du côté positif de Σ.

1. Soit $(u, v) \mapsto \varphi_0(u, v)$ un paramétrage local de Σ définit sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Pour tout réel t, on pose
$$\varphi_t(u, v) = \varphi_0(u, v) + tN(\varphi_0(u, v)).$$
Expliquer pourquoi φ_t est un plongement de U dans $\mathbb{R}^3$ lorsque $|t|$ est suffisament petit.
2. On note $d\sigma_t$ la forme d'aire définie sur l'image de φ_t par la métrique euclidienne, l'orientation canonique de $\mathbb{R}^3$ et la coorientation de Σ. Montrer que $\varphi_t^* d\sigma_t = \|\partial_u \varphi_t \wedge \partial_v \varphi_t\| du \wedge dv$.
3. On note K la courbure de Gauss de Σ et H sa courbure moyenne, c'est-à-dire le produit scalaire avec N de son vecteur de courbure moyenne. Montrer que
$$\|\partial_u \varphi_t \wedge \partial_v \varphi_t\| = \big(1 - tH + t^2 K\big) \|\partial_u \varphi_0 \wedge \partial_v \varphi_0\|,$$
les fonctions H et K étant toutes deux évaluées en $\varphi_0(u, v)$.
4. Montrer que, pour $\varepsilon > 0$ petit, la surface tubulaire
$$\Sigma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ d(x, \Sigma) = \varepsilon\}$$
a deux composantes connexes $\Sigma_\varepsilon^\pm$ vérifiant
$$\mathrm{aire}(\Sigma_\varepsilon^\pm) = \mathrm{aire}(\Sigma) \mp \varepsilon \int_\Sigma H d\sigma + \varepsilon^2 \int_\Sigma K d\sigma.$$
Vérifier cette formule lorsque Σ est une sphère euclidienne.
5. En déduire que l'aire de Σ_ε ne dépend que de la géométrie induite sur Σ, pas du plongement.
Remarque : le théorème de Gauss-Bonnet garantit en plus que l'intégrale de K ne dépend que de la topologie de Σ !
6. On considère le voisinage tubulaire $V_\varepsilon(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ d(x, \Sigma) < \varepsilon\}$. Montrer que
$$\mathrm{vol}(V_\varepsilon(\Sigma)) = 2\varepsilon\, \mathrm{aire}(\Sigma) + \frac{2\varepsilon^3}{3} \int_\Sigma K d\sigma.$$
Il s'agit d'un cas particulier de la formule des tubes de Weyl.