Feuille 11
Espaces CAT(0)

Dans les deux exercices qui suivent, (X, d) désigne un espace CAT(0) complet.

Exercice 1 – Sous-groupes compact maximaux
Soit G un groupe topologique agissant transitivement et isométriquement sur X. On suppose qu'il existe x dans X dont le stabilisateur K dans G est compact. Montrer que tout sous-groupe compact de G est conjugué à un sous-groupe de K.

Exercice 2 – Triangles dont la somme des angles vaut π
Soient Δ un triangle géodésique de X, de sommets p, q, r et $\overline{\Delta}$ un triangle de comparaison pour Δ dans le plan euclidien, de sommets associés $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$. On sait que si x appartient au segment $[q, r]$, $d(p, x) \leq \overline{d}(\overline{p}, \overline{x})$ (où $\overline{d}$ désigne la distance euclidienne).

1. Montrer que si la somme des angles (au sens d'Alexandrov) de Δ est égale à π, alors on a en fait $d(p, x) = \overline{d}(\overline{p}, \overline{x})$.
2. En déduire que si la somme des angles de Δ est π, l'enveloppe convexe de Δ est isométrique à l'enveloppe convexe de $\overline{\Delta}$ dans le plan euclidien.

Dans les deux exercices qui suivent, (M, g) désigne une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle. On note d la distance induite sur M par la métrique g.

Exercice 3 – Liberté et torsion
Soit G un groupe d'isométries de (M, g). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. le groupe G agit librement et proprement sur M,
2. le groupe G est discret dans $\mathrm{Isom}(M)$ et sans torsion.

Exercice 4 – Isométries et points fixes
Soient ϕ une isométrie de (M, g), et $d_\phi : M \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $d_\phi(x) = d(x, \phi(x))$. On dit que l'isométrie ϕ est *elliptique* si elle fixe (au moins) un point de M. Elle sera dite *hyperbolique* (ou axiale) si d_ϕ atteint son minimum sur M, et si ce minimum est strictement positif. Sinon, l'isométrie ϕ est dite *parabolique*.

1. Démontrer que la fonction d_ϕ est convexe.
2. Montrer que si pour un entier non nul m, l'isométrie ϕ^m est elliptique, alors ϕ est elliptique.
3. On suppose que ϕ est une isométrie hyperbolique de (M, g). On appelle a le minimum de d_ϕ sur M. Soit x_0 un point de M où le minimum de d_ϕ est atteint, et γ la géodésique parcourue à vitesse 1 qui joint x_0 et $\phi(x_0)$. Montrer que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\phi(\gamma(t)) = \gamma(t + a)$. On dit que γ est un *axe de translation* de ϕ. Montrer que si $t \mapsto \alpha(t)$ est un autre axe de translation de ϕ, alors $t \mapsto d(\gamma(t), \alpha(t))$ est une fonction constante.
4. On suppose maintenant que ϕ est une isométrie *parabolique*. Montrer qu'il existe une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M qui part à l'infini (c'est-à-dire que tout compact de M ne contient qu'un nombre fini de termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et telle que $d_\phi(x_n)$ soit bornée. En déduire que ϕ admet un point fixe sur $\partial_\infty M$.
5. Illustrer ce qui précède dans le cadre de l'espace hyperbolique réel. En dimension 2, faire le lien avec la classification des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à conjuguaison près.