Université Paris-Sud
Mathématiques
Centre d'Orsay

Feuille 2
Exemples de groupes et algèbres de Lie

Master 2 AAG
Géométrie Riemannienne
2012-2013

Exercice 1 – Déterminer, à isomorphisme près, toutes les algèbres de Lie réelles de dimension 2. Vérifier que chacune de ces algèbres est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Quelles sont celles qui sont nilpotentes ou résolubles ?

Exercice 2 – On appelle SU(2) le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui préserve la forme hermitienne $|z_1|^2 + |z_2|^2$. On pose :

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que SU(2) est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
2. Montrer que les matrices E_1, E_2 et E_3 forment une base de $\mathfrak{su}(2)$. Expliciter les relations de crochets entre E_1, E_2 et E_3.
3. Sur $\mathfrak{su}(2)$, on considère la forme quadratique $Q(M) = \det(M)$. Montrer que la représentation adjointe définit naturellement un morphisme $\rho : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.
4. Montrer que ρ est une submersion, puis que c'est un morphisme surjectif. Quel est son noyau ?
5. Montrer que SU(2) et SO(3) sont difféomorphes à des variétés de dimension 3 bien connues.

Exercice 3 – On appelle $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2 de déterminant $+1$. On pose

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que H, E et F forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Expliciter les relations de crochet entre H, E, F.
2. On note B la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de B dans la base E, H, F. Quelle est sa signature ?
3. Montrer que les algèbres de Lie complexes $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C}$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont isomorphes.
4. Montrer que la représentation adjointe fournit un morphisme de groupes de Lie entre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_o(1,2)$ (où $\mathrm{SO}_o(1,2)$ est la composante neutre de $\mathrm{SO}(1,2)$), et que ce morphisme est surjectif. Déterminer son noyau. Montrer que les formes volume invariantes à gauche sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont aussi invariantes à droites (on relira au besoin l'exercice correspondant de la Feuille 1).

Exercice 4 – On pose $\mathrm{Sol}(3) = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ où $t \in \mathbb{R}$ agit sur $\mathbb{R}^2$ via la matrice $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que Sol(3) est un groupe de Lie.
2. Décrire son algèbre de Lie et montrer qu'elle est résoluble.
3. Montrer qu'il existe des formes de contact invariantes à gauche sur Sol(3) (on rappelle qu'une 1-forme α sur une variété de dimension 3 est dite de contact si $\alpha \wedge d\alpha$ est partout non nulle).