Feuille 4
Actions de groupes de Lie

Dans tous les exercices de cette feuille, on note G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual d'icelle. On rappelle qu'une forme symplectique est une 2-forme différentielle fermée partout non dégénérée.

Exercice 1 – Espaces homogènes pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que la seule variété connexe de dimension 1 qui admette une action lisse et transitive du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est le cercle. En déduire que toute action lisse de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur le cercle est soit triviale (c'est-à-dire que tous les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agissent par l'identité), soit transitive.
2. Montrer qu'il n'existe aucune action lisse non triviale de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la droite réelle.
3. On va maintenant montrer qu'il n'existe pas d'action lisse transitive de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$. On admettra que tout champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{S}^2$ s'annule en au moins un point. Supposons qu'il existe une action lisse de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^2$ qui soit transitive. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, le stabilisateur G_x devrait contenir à la fois un sous-groupe à un paramètre hyperbolique, un parabolique, et un elliptique. Conclure.

Exercice 2 – Champ de vecteurs fondamental d'une action de groupe de Lie

On fixe une action lisse de G sur une variété M. À tout X dans $\mathfrak{g}$, on associe le champ de vecteurs X_M sur M défini par

$$X_M(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(tX)x.$$

1. Montrer que, pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, $[X_M, Y_M] = -[X, Y]_M$.
2. On fixe x dans M et on note $\mathfrak{g}_x$ l'algèbre de Lie du stabilisateur G_x. Montrer que $X \mapsto X_M(x)$ induit un isomorphisme entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$ et $T_x(G \cdot x)$.

Exercice 3 – Théorème de Noether

Soit (W, ω) une variété symplectique. Le champ de vecteurs hamiltonien X_H associé à $H \in \mathcal{C}^\infty(W)$ est l'unique champ de vecteurs vérifiant $dH = -\iota_{X_H}\omega$. On dit qu'une action de G sur W est hamiltonienne s'il existe une application linéaire $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(W)$ telle que, pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, $\xi_W = X_{J(\xi)}$ avec les notations de l'exercice précédent. On note alors $\mathbb{J}$ la fonction de W dans $\mathfrak{g}^*$ définie par $\langle \mathbb{J}(x), \xi \rangle = J(\xi)(x)$

1. Soit H une fonction lisse G-invariante sur W. Montrer que $\mathbb{J}$ est invariante par le flot de X_H.
2. On suppose qu'un système mécanique est soumis à des forces dérivant d'un potentiel invariant par rotation autour d'un axe Δ. Montrer que l'évolution de ce système préserve le moment cinétique le long de Δ.

Exercice 4 – Orbites coadjointes

On appelle représentation adjointe (resp. coadjointe) de G la représentation $G \to GL(\mathfrak{g})$ (resp. $G \to GL(\mathfrak{g}^*)$) qui envoie g sur Ad_g (resp. ${}^t(\mathrm{Ad}_{g^{-1}})$). On utilise les notations de l'exercice 2.

1. Montrer que, pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, $X_{\mathfrak{g}}(Y) = [X, Y]$.
2. Montrer que, pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et tout λ dans $\mathfrak{g}^*$, $X_{\mathfrak{g}^*}(\lambda) = -{}^t(\mathrm{ad}\, X)(\lambda)$.
3. On fixe λ dans $\mathfrak{g}^*$. Montrer que la forme bilinéaire $\underline{\omega}$ définie sur $\mathfrak{g}$ par $\underline{\omega}(X, Y) = \lambda([X, Y])$ passe au quotient en forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda$.
4. Montrer que la forme différentielle G-invariante ω induite par $\underline{\omega}$ sur G/G_λ est symplectique.
5. Décrire les orbites de l'action coadjointe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5 – Grassmanniennes
Soient k et n deux entiers naturels. On désigne par $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k dans $\mathbb{R}^n$.
On fait agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de manière naturelle sur $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$: un élément $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ envoie $C \in \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ sur le sous-espace $g(C)$.

1. Montrer que cette action est transitive.
2. Montrer que le stabilisateur d'un point est conjugué au groupe :
$$P_{n,k} := \{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})\}.$$
En déduire qu'on peut munir $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ d'une structure de variété lisse pour laquelle l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est lisse.
3. Montrer que les variétés $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/P_{n,k}$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/(\mathrm{O}_k(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_{n-k}(\mathbb{R}))$ sont difféomorphes.

Soit G un groupe de Lie qui agit de manière lisse et transitive sur une variété M. Pour tout $x \in M$, on désigne par G_x le stabilisateur du point x, et on appelle *représentation d'isotropie* le morphisme $\rho_x : G_x \to \mathrm{GL}(T_xM)$ défini par $\rho_x(g) = T_xg$. La variété homogène M est dite *isotrope pour l'action de* G lorsque, pour tout $x \in M$, le groupe $\rho_x(G_x)$ agit transitivement sur les demi-droites vectorielles de T_xM.

4. Vérifier que dans la définition précédente, on peut remplacer « pour tout x » par « pour un x ».
5. On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pour quelles valeurs de $k \in \{1, \dots, n-1\}$ la variété grassmannienne $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ est-elle isotrope pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?