Feuille 5
Fibrés

Exercice 1 –
Soit γ_n le fibré tautologique sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. On rappelle que son espace total est

$$\{(d,x) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1};\ x \in d\}.$$

1. Montrer que, si s est une section continue de γ_n, alors il existe une application continue $t : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ telle que $s(\mathbb{R}x) = t(x)x$.
2. Montrer que γ_n n'est pas un fibré trivial.
3. Soit $i : \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ un plongement induit par un plongement linéaire de $\mathbb{R}^{k+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Décrire $i^*\gamma_n$.

Exercice 2 –
On dit qu'un fibré vectoriel $E \to M$ est stablement trivial s'il existe un fibré vectoriel trivial $F \to M$ tel que $E \oplus F$ est trivial. Montrer que, pour tout n, le fibré tangent à $\mathbb{S}^n$ est stablement trivial.

Exercice 3 –
Tous les objets de cet exercice sont de classe $\mathcal{C}^r$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit B une variété différentiable. On note ε le fibré vectoriel réel trivial de rang 1 au-dessus de B. Soit E un fibré vectoriel au-dessus de B admettant une section partout non nulle. Montrer qu'il existe un fibré vectoriel F sur B tel que $E \simeq F \oplus \varepsilon$.

Exercice 4 – Thurston et les fibrés symplectiques
Soit $\pi : M \to B$ une fibration lisse (localement triviale) de fibre F. On se donne un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_\alpha$ de B et, pour tout α, une trivialisation locale

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\phi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

et, pour tout $b \in U_\alpha$, on note $\phi_\alpha(b)$ la composée de la restriction de ϕ_α à la fibre $F_b = \pi^{-1}(b)$ et de la projection de $U_\alpha \times F$ sur F. On note aussi $\phi_{\beta\alpha}(b) = \phi_\alpha(b) \circ \phi_\beta(b)^{-1} \in \mathrm{Diff}(F)$. On dit que π est une *fibration symplectique* s'il existe de plus une forme symplectique σ sur F qui est invariante sous l'action de tous les $\phi_{\beta\alpha}(b)$. En particulier la forme symplectique $\sigma_b = \phi_\alpha(b)^*\sigma$ sur F_b ne dépend pas du choix de l'ouvert U_α contenant b.
On note ι_b l'inclusion de la fibre F_b dans l'espace total M. On suppose maintenant que B est munie d'une forme symplectique β et que M est compacte. On va montrer que s'il existe $a \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$ telle que, pour tout b, $\iota_b^* a = [\sigma_b]$, alors M porte une structure symplectique induisant σ_b sur chaque fibre.

1. Montrer qu'on peut supposer que les ouverts U_α sont homéomorphes à des convexes d'un espace affine réel. On le supposera désormais.
2. Montrer que $\iota_b^* : H^*_{\mathrm{dR}}(\pi^{-1}(U_\alpha)) \to H^*_{\mathrm{dR}}(F_b)$ est un isomorphisme.
3. Soit τ_0 une forme différentielle représentant a sur M. Sur $U_\alpha \times F$, on définit $\sigma_\alpha = {\mathrm{pr}_2}^*\sigma$. Montrer qu'il existe une 1-forme différentielle λ_α sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$ telle que

$$\phi_\alpha^*\sigma_\alpha - \tau_0 = d\lambda_\alpha.$$

4. Soit $(\rho_\alpha)_\alpha$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$. On pose
$$\tau = \tau_0 + \sum_\alpha d\left((\rho_\alpha \circ \pi)\lambda_\alpha\right).$$
Montrer que $\iota_b^*\tau = \sigma_b$ pour tout b dans B.
5. Pour tout x dans M, on note V_x le sous-espace vertical $\ker T_x\pi$ de T_xM. Montrer que le champ de plans
$$H_x = \{u \in T_xM;\ \ \forall v \in V_x,\ \tau(u,v) = 0\}$$
est un supplémentaire de V_x qui est isomorphe à $T_{\pi(x)}B$ via $T_x\pi$.
6. Montrer que, pour toute constante K suffisament grande, $\omega_K = \tau + K\pi^*\beta$ est une forme symplectique qui convient.

Exercice 5 – Théorème de réduction de Marsden-Weinstein
On considère une action hamiltonienne lisse d'un groupe de Lie compact G sur une variété symplectique (M,ω). On note $\mathbb{J} : M \to \mathfrak{g}^*$ une application moment pour cette action, comme dans l'exercice 3 de la feuille 3. On suppose de plus que $\mathbb{J}$ est equivariante[1] pour l'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$. On rappelle que, si ω est une forme symplectique sur un espace vectoriel E, l'orthogonal symplectique d'un sous-espace F de E est $F^\omega = \{u \in E;\ \forall v \in F,\ \omega(u,v) = 0\}$.

1. Montrer que $\mathbb{J}^{-1}(0)$ est G-invariant (Indication : l'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$ fixe 0).
2. Soit p un point de M. On note $\mathcal{O}_p$ l'orbite de p sous l'action de G et $\mathfrak{g}_p$ l'algèbre de Lie du stabilisateur de p. Montrer que
$$\ker d\mathbb{J}_p = (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p} \quad \text{et} \quad \operatorname{im} d\mathbb{J}_p = \mathfrak{g}_p^\circ = \{\lambda \in \mathfrak{g}^*;\ \langle \lambda, \xi\rangle = 0\ \ \forall \xi \in \mathfrak{g}_p\}.$$
3. On suppose désormais que G agit librement sur $\mathbb{J}^{-1}(0)$. Montrer que $\mathbb{J}^{-1}(0)$ est une sous-variété de codimension $\dim G$ de M. On note i son inclusion dans M.
4. On note π la projection de $\mathbb{J}^{-1}(0)$ sur la « variété symplectique réduite » $M_{\mathrm{red}} = \mathbb{J}^{-1}(0)/G$. Montrer qu'il existe une forme symplectique ω_{red} sur M_{red} telle que $i^*\omega = \pi^*\omega_{\mathrm{red}}$.

Exercice 6 –
On considère l'action de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$, déduite de l'action linéaire de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ sur les demi-droites de $\mathbb{R}^3$. On munit $\mathbb{S}^2$ d'une orientation, et on appelle $\mathcal{R}^+(\mathbb{S}^2)$ le fibré des repères directs.
Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ agit de manière lisse et transitive sur $\mathcal{R}^+(\mathbb{S}^2)$, et en déduire le groupe fondamental de $\mathcal{R}^+(\mathbb{S}^2)$. Retrouver par ce biais que le fibré tangent de $\mathbb{S}^2$ n'est pas trivial.

1. Selon les auteurs, cette condition fait partie de la définition d'action hamiltonienne ou est rajoutée.